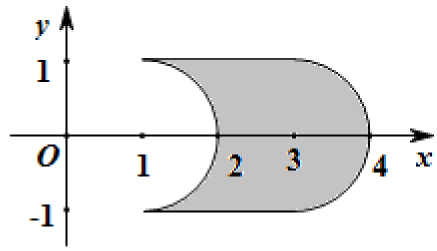
利用祖暅原理求旋转体体积的教学建议

位育中学 周宇

一、从一个高考试题引发的思考

2013 年我带高三毕业班，非常喜欢当年上海高考数学试卷的第 13 题，利用祖暅原理求旋转体的体积．欣赏之余，不由感慨，常自省反思，在平时的数学教学中，如何用好这一素材．

先给出题目：



在 xOy 平面上，将两个半圆弧 $(x-1)^2+y^2=1(x\ge 1)$ 和 $(x-3)^2+y^2=1(x\ge 3)$、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D，如图中阴影部分．记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω，过 $(0,y)(|y|\le 1)$ 作 Ω 的水平截面，所得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$，试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体，得出 Ω 的体积值为______________．

解答：根据提示，一个半径为 1，高为 2π 的圆柱平放，一个高为 2，底面面积 8π 的长方体，这两个几何体与 Ω 放在一起，根据祖暅原理，每个平行水平面的截面面积都相等，故它们的体积相等，即 Ω 的体积值为 $\pi\cdot 1^2\cdot 2\pi+2\cdot 8\pi=2\pi^2+16\pi$.

现行的上海高中数学教材中，只给出了球体积的公式．在以前的教材中有利用祖暅原理推导球体积公式的方法与过程，但也没有相应配套的例题和习题．学生只是了解，而不会运用这一思想和方法．

所以出题者为了降低难度、突出重点，给出了截面面积 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$ 这一铺垫，而且最后还提示用“祖暅原理”构造“一个平放的圆柱和一个长方体”．但大多数学生在高考考试环境中还是较难从截面面积去“构造”出合理的几何体．

如果在这一内容的教学中，适当挖掘拓展，提供相应的例题、习题加以训练，学生将从中受益匪浅．

作为培养学生数学思维、数学素养的载体，下面列举这是一个好的素材的理由：

1、通过涉及的数学家、数学史的介绍，感受中国古代学者思想的先进性，爱国主义等教育渗透其中；

2、用联想、类比等方法，拓展思维；

3、计算平行截面的面积，是形到数的过程，再由面积式去构造几何体，是数到形的过程，数形结合；

4、训练思维、方法的迁移，培养探究问题的能力与习惯；

5、引入并学习微积分，体验用微积分这一思想、方法解决问题的优越性；

6、符合新的数学课程标准的理念．

二、祖暅原理

祖暅原理，又名等幂等积定理，内容是：夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平行平面的任何平面所截，如果截得两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等．祖暅之《缀术》有云："缘幂势既同，则积不容异．（卡瓦列利原理）

三、祖暅原理的应用举例

通过对球体积公式的推导，让学生体悟是怎么想到的．分析的关键是如何由截面面积式去构造一个圆柱挖去一个圆锥所得几何体与半球等积，然后类比引申到旋转椭球体．

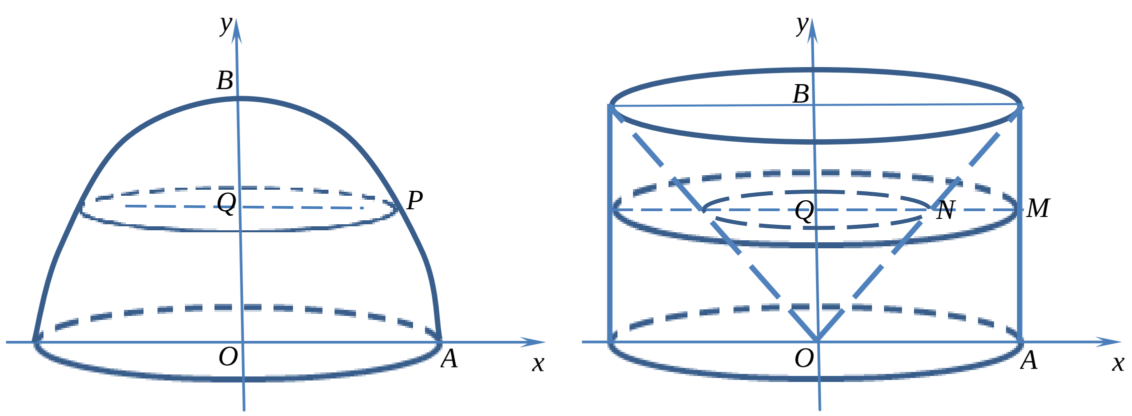
1、将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 及其内部绕 y 轴旋转一周所得到的几何体 Ω 称之为旋转椭球体．类似于球的体积公式的推导，构造一个圆柱挖去一个圆锥而成的几何体，利用祖暅原理可得出此旋转椭球体的体积为____________．

答案：$\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

分析 1：解决此题的关键，是先求出平行截面的面积 $S(t)$，再由截面面积 $S(t)$构造出新的"等积"几何体．算出新的几何体体积，根据祖暅原理，从而得到此旋转椭球体的体积．如何构造？联想到推导球体积公式的方法，在一个圆柱体中挖去一个倒置的圆柱体．

解法 1：在 y 轴上取点 $Q(0,t)$,$(0\le t\le b)$，过点 Q 作垂直于 y 轴的平面，交椭圆弧 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\ge 0,y\ge 0)$

于点 $P(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-t^2},t)$，截上半个旋转椭球体 Ω_1 得到以 Q 为圆心，$\frac{a}{b}\sqrt{b^2-t^2}$ 为半径的圆面，此截面的面积 $S_1=\frac{\pi a^2}{b^2}(b^2-t^2)=\pi a^2-\pi\frac{a^2}{b^2}t^2=S(t)$.



由此 $S(t)$构造：设圆柱底面半径为 a，高为 b．以此圆柱的上底面为底面，下底面圆心为顶点，得到一倒置的圆锥．由此圆柱挖去这个圆锥而成的几何体，亦即直线 $x=a$、直线 $y=\frac{b}{a}x$ 及 x 轴围成的三角形及其内部，绕 y 轴旋转一周所形成的几何体 Ω_2．过点 Q 垂直于 y 轴的平面交直线 $x=a$ 于点 $M(a,t)$、交直线 $y=\frac{b}{a}x$ 于点 $N(\frac{b}{a}t,t)$，截此几何体 Ω_2 得到以 Q 为圆心，半径分别为 a 和 $\frac{b}{a}t$ 的圆环及内部，此截面的面积 $S_2=\pi a^2-\pi\frac{a^2}{b^2}t^2=S(t)$.

易知，几何体 Ω_2 的体积 $V=V_{圆柱}-V_{圆锥}=\pi a^2b-\frac{1}{3}\pi a^2b=\frac{2}{3}\pi a^2b$.

根据祖暅原理，上半个旋转椭球体 Ω_1 与几何体 Ω_2 的体积相等．由对称性得旋转椭球体 Ω 的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^2b$.

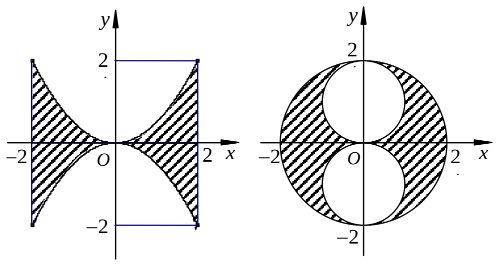
分析 2：如果我们把几何体的体积看成是以 $S(t)$为底面，Δt 为高的小圆柱的体积 $S(t)\cdot\Delta t$ 之和的极限，那么可用定积分来求旋转椭球体 Ω 的体积.（求几何体体积的微积分解释见附录）

解法 2：由定积分的定义可知，旋转椭球体 Ω 的体积为：

$$V=2\int_0^b S(t)dt=2\int_0^b(\pi a^2-\pi\frac{a^2}{b^2}t^2)dt=2(\pi a^2t-\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{b^2}t^3)\Big|_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2b.$$

四、巩固训练

2、由曲线 $x^2=2y$，$x^2=-2y$，$x=2$，$x=-2$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积为 V_1；满足 $x^2+y^2\le4$，$x^2+(y-1)^2\ge1$，$x^2+(y+1)^2\ge1$ 的点组成的图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积为 V_2，试写出 V_1 与 V_2 的一个关系式____________.



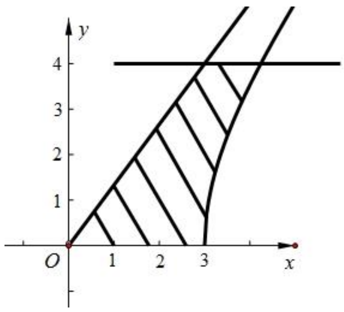
答案：$V_1=V_2$．($V_1=V_2=8\pi$.)

简析：(1) 由对称性，对于 $0\le y\le2$ 的平行截面面积 $S_1=\pi(4-x^2)=\pi(4-2y)$，

$S_2=\pi(x_1^2-x_2^2)=\pi[(4-y^2)-(1-(y-1)^2)]=\pi(4-2y)$，$S_1=S_2=S(y)$；

(2) 定积分法：$V_1=V_2=2\int_0^2S(y)dy=2\int_0^2\pi(4-2y)dy=2\pi(4y-y^2)\big|_0^2=8\pi$.

3、在 xOy 平面上，将双曲线的一支 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1(x>0)$ 及其渐近线 $y=\frac{4}{3}x$ 和直线 $y=0$， $y=4$ 围成的封闭图形记为 D，如图中阴影部分.记 D 绕 y 轴旋转一周所得的几何体为 Ω . 过 $(0,y)(0\le y\le 4)$ 作 Ω 的水平截面，计算截面面积，利用祖暅原理得出 Ω 的体积为__________.

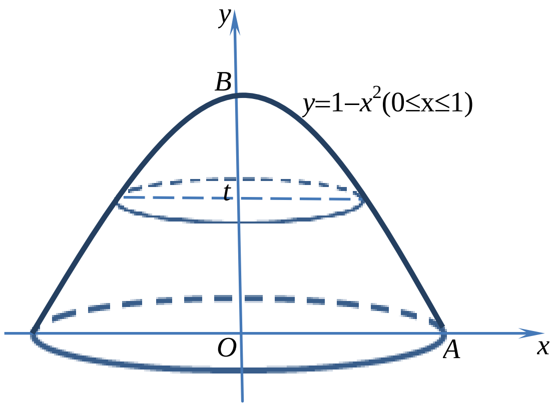


答案：36π.

简析：(1) 对于 $0\le y\le 4$ 的平行截面面积 $S(y)=\pi(x_1^2-x_2^2)=\pi[(9-\frac{9}{16}y^2)-(\frac{3}{4}y)^2]=9\pi$，由此构造底面半径为 3，高为 4 的圆柱；

(2) 定积分法：$V=\int_0^4 S(y)dy=\int_0^4 9\pi dy=9\pi y|_0^4=36\pi$.

4、在 xOy 平面上，将抛物线弧 $y=1-x^2(0\le x\le 1)$、x 轴、y 轴围成的封闭图形记为 D，如图中曲边三角形 OAB 及内部．记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω，过点 $(0,y)(0\le y\le 1)$ 作 Ω 的水平截面，所得截面面积为________，试利用祖暅原理、一个平放的直三棱柱，得出 Ω 的体积值为__________.



答案：$(1-y)\pi$，$\frac{\pi}{2}$.

简析：(1) 对于 $0\le y\le 1$ 的平行截面面积 $S(y)=\pi x^2=\pi(1-y)$，由此构造直三棱柱，其侧棱长为 π，底面是直角边长为 1 的等腰直角三角形，并将此直三棱柱的一个直角边所在的侧面水平放置；

(2) 定积分法：$V=\int_0^1 S(y)dy=\int_0^1 \pi(1-y)dy=\pi(y-\frac{1}{2}y^2)|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

研究上述几何体 Ω 的体积与底面半径为 1、高为 1 的圆柱的体积的关系.

答案：一半.

5、在与水平面垂直的 xOy 平面上，将圆$(x-2)^2+y^2=1$ 及其内部绕 y 轴旋转一周而成的几何体为圆环体 Ω，过点$(0,y)(|y|\le1)$作 Ω 的水平截面，所得截面面积为__________，试构造一个平放的圆柱，利用祖暅原理得出圆环体 Ω 的体积值为____________.

答案：$S=8\pi\sqrt{1-y^2}$，$V=4\pi^2$.

简析：(1) 对于$-1\le y\le1$，$x_1=2+\sqrt{1-y^2}$，$x_2=2-\sqrt{1-y^2}$，$x_1^2-x_2^2=8\sqrt{1-y^2}$，

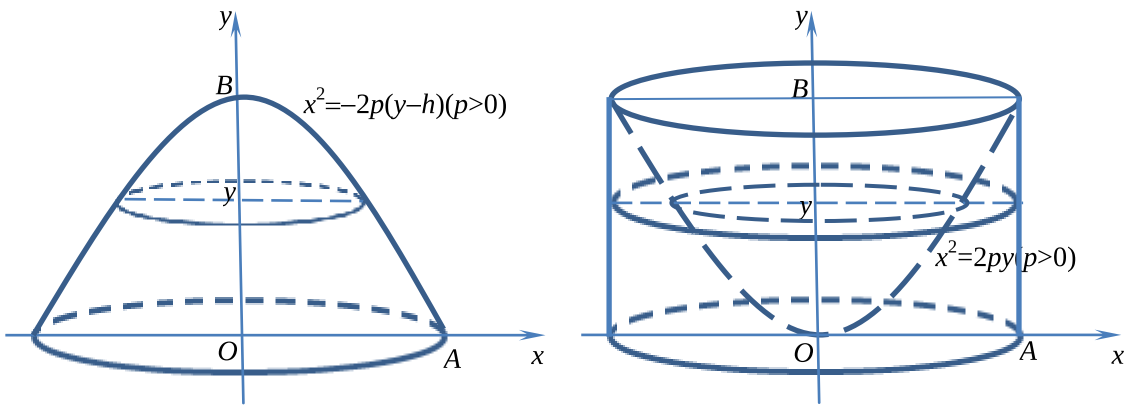
平行截面面积$S(y)=\pi(x_1^2-x_2^2)=8\pi\sqrt{1-y^2}$，由此构造圆柱；

(2) 定积分法：$V=\int_{-1}^{1}S(y)dy=\int_{-1}^{1}8\pi\sqrt{1-y^2}dy=8\pi\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi^2$.

注：$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$ 是半个单位圆的面积.

五、联想、迁移、拓展

6、若将抛物线 $x^2=2py(p>0)$绕 y 轴旋转一周，得到一旋转抛物面，设直线 $y=h(h>0)$绕 y 轴旋转所得的平面为 α，求平面 α 与旋转抛物面所围成的旋转抛物体的体积.



答案：πph^2.

简析：(1) 如果直接求抛物线 $x^2=2py(p>0)$绕 y 轴旋转一周所得旋转体的平行截面面积，则对于$0\le y\le h$，$S(y)=\pi x^2=\pi\cdot2py$. 由此构造一个直三棱柱，其侧棱长为 $2p\pi$，底面是直角边长为 h 的等腰直角三角形，并将此直三棱柱的一个直角边所在的侧面放置在平面 α；

(2) 定积分法：$V=\int_{0}^{h}2\pi pydy=\pi py^2|_0^h=\pi ph^2$；

(3) 如上图，以旋转抛物体的上底面为底面作一高为 h 的圆柱体，然后将旋转抛物体取出并倒置，相当于抛物线 $x^2=-2p(y-h)(p>0)$饶 y 轴旋转一周，则对于 $0\le y\le h$，所得旋转体的截面面积 $S(t)=\pi x^2=-\pi\, 2p(y-h)=\pi(2ph-x^2)$，即如上左图的截面为圆的面积等于右图的截面为圆环的面积.

7、将双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$绕虚轴旋转一周所得到的曲面称之为旋转单叶双曲面，如果把实轴绕虚轴旋转一周所得到的平面记为α、平面β是一个平行于α且距α的距离为 h 的平面，求α、β和旋转单叶双曲面所围成的几何体的体积．

答案：$V=\pi a^2h(1+\frac{h^2}{3b^2})$.

简析：(1) 对于 $0\le y\le h$ 的平行截面面积$S(y)=\pi x^2=\pi(a^2+\frac{a^2}{b^2}y^2)=\pi a^2+\pi(\frac{a}{b}y)^2$，由此构造一个底面半径为 a，高为 h 的圆柱和一个倒置的底面半径为$\frac{a}{b}h$，高为 h 的圆锥，此圆锥的侧面恰是双曲线的渐近线绕虚轴旋转而成；

(2) 定积分法：$V=\int_0^h\pi(a^2+\frac{a^2}{b^2}y^2)dy=\pi a^2(y+\frac{1}{3b^2}y^3)\Big|_0^h=\pi a^2h(1+\frac{h^2}{3b^2})$.

上述这组题目，或者用祖暅原理求体积，或者用定积分求体积，都需要求出平行截面的面积 $S(t)$．用祖暅原理求解的难点在于由截面面积去“构造”等积的几何体，通过训练，可逐步提高学生的想象能力．而用定积分求解，难度相对较低，体现出微积分这一工具的优越性．

这组题目，由特殊到一般，由圆的旋转类比联想到椭圆、双曲线、抛物线的旋转，以及数学迁移的三个层次：同化——顺应——重组．通过训练，从而使学生的思维更流畅、更深刻、更有效、更具有创造性．这才是我们教学的更高境界．

六、附录

求几何体体积的微积分解释：

设 Ω 为一空间立体，它夹在两水平平面 $t=a,t=b$ 之间（不妨设 $a<b$），并称 Ω 为位于$[a,b]$上的空间立体. 它被平行于水平平面的截面所截得的面积 $S(t)$为 t 的连续函数.

分$[a,b]$为 n 份，其分点为：$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$.

于是几何体Ω被分成了 n 个小部分. 自下而上的第 k 个小部分的厚度是 t_k-t_{k-1}，记$\Delta t_k= t_k-t_{k-1}$. 这一小部分上下两个截面面积分别是 $S(t_k)$和 $S(t_{k-1})$. 由于这一小部分很薄，$S(t_k)$和 $S(t_{k-1})$应当相差甚微，于是这一小部分的体积近似地等于它的截面面积与厚°的乘积，即 $S(t_k)\cdot\Delta t_k$.

把各小部分的近似体积加起来，得 $\sum_{k=1}^{n} S(t_k)\Delta t_k$.

再让Δt_k中最大者Δt趋于 0 取极限，即得 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(t_k)\Delta t_k$. 由定积分的定义，这个极限正是函数 $S(t)$在$[a,b]$上的定积分，也就是几何体 Ω 的体积，即 $V=\int_a^b S(t)dt$.

参考文献：

[1] 安徽省岳西中学，储炳南，研究性学习实例之三：祖暅原理的应用——兼谈数学迁移中同化、顺应、重组. 2013.7.

[2] 重庆教育学院经济贸易系，张伟，祖暅原理的由来及证明. 重庆教育学院学报第 23 卷第 3 期，2010.5.113-115.

2018 年 8 月