“圆锥曲线中的形数转化”

--一节高三二轮复习课的教学设计和思考

黄庆锋　上海市位育中学　200231

摘要：解析几何是历年高考数学的重点内容。在解决解析几何综合问题时，常常因为图形复杂、条件多变、运算复杂、思路灵活，导致学生不知如何入手求解，或者出现有思路会解却算不对。揭示解析几何综合问题的解题路径和解题方法，是提高学生解题能力的有效手段。本文围绕运用形数结合解决圆锥曲线的问题谈谈一节复习课的教学设计和反思。

关键词：圆锥曲线形数转化　教学设计 反思

一、教学内容分析

“圆锥曲线中的形数转化”是高三第二轮专题复习中圆锥曲线综合应用的一节复习课。本课对直线和圆锥曲线的位置关系中的常规问题以方法为线索进行梳理、归类，突出形数转化的方法在解决圆锥曲线问题中的作用。针对直线和圆锥曲线的位置关系中常见的几何关系梳理对应的代数关系，巩固解析几何中几何问题代数化的基本思想方法；针对圆锥曲线综合题的“会做、做不出”的问题，引导学生经历数与形相互转化的过程，掌握此类问题的解题方法和解题途径。

二、教学目标设置

1、知识与技能：掌握圆锥曲线的基本概念、方程和基本性质，学会运用斜率、向量、坐标法解决直线和圆锥曲线位置关系中的问题。2、过程与方法：通过解决直线和圆锥曲线中不同背景的问题，掌握直线和圆锥曲线的关系，理解不同曲线之间的联系，经历问题“代数化”以及数与形的相互转化解决问题的过程，掌握解综合题的途径和解题的方法，突破学生解决圆锥曲线考题时“会做却做不出”的发展瓶颈。3、情感、态度与价值观：通过对一轮复习中的作业题考题的再研究，是学生体会到“老问题”中的“新内涵”，发现解决“老问题”中的“新方法”，体会解决问题的乐趣，培养解题的自信心。

三、学生学情分析

通过第一轮复习学生已经能够比较熟练的掌握解析几何中几何问题代数化的思想，而对于直线和圆锥曲线的综合问题，常常面临“思路易得，结论难求”的状况。在二轮复习中有必要对存在的问题进行方法的总结和再指导，通过本课旨在教会学生运用形数转化方法，化解直线和圆锥曲线位置关系相关问题的难点，促进圆锥曲线综合问题的解题能力的提高。

四、教学策略分析

本节课采用“问题-练习-建构”的教学模式，基本的程序是“变式导练-探究交流-归纳提炼-完善建构”。以问题为导向设计教学情境，以直线和圆锥曲线中难入手或或会做却难解出的问题为基本研究内容，为学生提供自由表达、质疑、探究、讨论问题的机会，让学生充分的展开思维，学会用形数转化的方法解决圆锥曲线的综合问题。

五、教学过程设计

1、设计题组，预学初想

基于学生在一轮复习中已经对直线和圆锥曲线的位置关系中一些常规问题有一定基础，将结合做过一轮复习直线和圆锥曲线的关系中已做过习题的难点、疑惑点和以往考题的考点诉求，根据学生认知规律，本课教师精心设计了梯度明显、前后连贯、有效整合的问题题组。

例题：过点 $A(3,0)$ 的直线 l 与双曲线 $C_1:2x^2-y^2=1$ 相交于 B,C

问题 1：若以 BC 为直径的圆经过原点，求直线 l 的方程.

问题 2：若 $A'(-1,0),|A'B|=|A'\mathrm{C}|,$ 求直线 l 的方程.

问题 3：若 $|AB|=\frac{3}{2}|B\mathrm{C}|,$ 求直线 l 的方程.

问题 4：若 $s_{\Delta AOB}:s_{\Delta BOC}=1:2$，求直线 l 的方程.

问题 5：设直线 l 与双曲线 C_1 的渐近线相交于 D,E，且 $|BD|,|\mathrm{DE}|,|\mathrm{EC}|$ 成等差数列，求直线 l 的方程.

问题 6：设曲线 $C_2:|y|=\sqrt{2}|x|+1,$ 在圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 内存在点 Q，使经过点 Q 的直线与曲线 C_1,C_2 都相交，求 k 的取值范围.

设计意图：问题 1,2,3,4 都以一轮知识复习原题为基础延伸视角，体现几何问题代数化的思想。问题 6 以高考真题为母题拓展链接，体现数-形-数的思维过程，数与形相互转化解题的应用。题组针对学生在一轮复习中的困难点，结合高考的考点，力求例题精选细致准确。通过变式问题串的解决强化圆锥曲线几何问题代数化的基本思想，揭示圆锥曲线综合题的解题规律，整合形数转化的方法，力求达到使学生对此类问题本质了解、规律掌握、知识巩固、技能形成、知识迁移等目的。

教学反思：由于题组教学形式组织的二轮复习追求“大容量、快节奏、高效率”，没有学生课前的充分预学，复习效果很难得到保证。本课提出明确的“预学”要求，指导学生围绕导学案先行预学，展开问题初想，在预学中产生学习疑问，激发他们带着兴趣、带着问题、带着思考、带着目标参与学习，以学习主人的身份进入课堂。同时学会独立获取知识，促进复习效率的提高。课前留给学生充分的预学时间，力求学生根据自己的理解描述问题，发现可隐蔽的条件，搜寻相应的解题途径，真正让学生“有备而来”。争取达到指导学生的学习习惯，同时高效实现复习目标的目的。

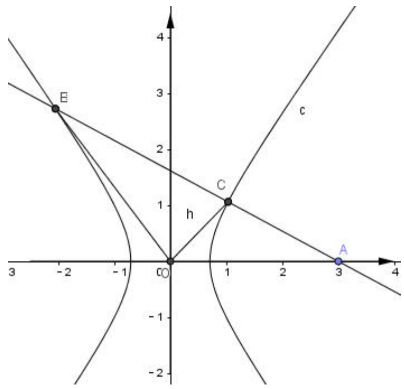
2、探究交流、主体参与

在考虑学生主体作用的基础上，对本专题的学习活动，做了如下设计：(1)展示学生的解法（拍照并多媒

体展示）, 同时学生在课堂讲解自己的解题思路；(2)师生交流, 点评小结.

过点 $A\left(3,0\right)$ 的直线 l 与双曲线 $C_1: 2x^2-y^2=1$ 相交于 B,C

问题 1：若以 BC 为直径的圆经过原点，求直线 l 的方程.



生 1 思路：设 M 为 BC 的中点，则 $|OM|=\frac{1}{2}|BC|$.

设直线 l: $y=k(x-3) or x=3$，求出 BC 的中点 M 的坐标，BC 的弦长, 代入上式，可得直线 l 的方程.

生 1 解法：设 M 为 BC 的中点，则 $|OM|=\frac{1}{2}|BC|$

设直线 l: $y=k(x-3)$ $\because \begin{cases} y=k(x-3) \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases} \therefore (2-k^2)x^2+6k^2x-9k^2-1=0$

$\therefore x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2-2}, x_1\cdot x_2=\frac{9k^2+1}{k^2-2} \therefore x_M=\frac{3k^2}{k^2-2}$

$\because y=k(x-3) \therefore y_M=k(\frac{3k^2}{k^2-2}-3)=\frac{6k}{k^2-2}$

$\because \Delta=4\sqrt{17k^2+2} \therefore |BC|=\sqrt{1+k^2}\,\frac{2\sqrt{17k^2+2}}{|2-k^2|}$

$\because |OM|=\frac{1}{2}|BC| \therefore \sqrt{(\frac{6k}{k^2-2})^2+(\frac{9k^2+1}{k^2-2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\,\frac{2\sqrt{17k^2+2}}{|2-k^2|}$

解得 $k=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \therefore l: x\pm 2\sqrt{2}y-3=0$

设直线 l: $x=3$，$\therefore M(3,0) \therefore |OM|=3$

$\because \begin{cases} x=3 \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=3 \\ y=\pm\sqrt{17} \end{cases} \therefore |BC|=2\sqrt{17}$，不合题意，舍去

生 2 思路：利用 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$, 可得 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

设直线 l: $y=k(x-3) or x=3$，建立 k 的方程，可求得 k

生 2 解法：设直线 l: $x=3$ $\because \begin{cases} x=3 \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=3 \\ y=\pm\sqrt{17} \end{cases}$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=-8\neq 0$，不合题意，舍去

设直线l: $y=k(x-3)$ $\because \begin{cases} y=k(x-3) \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases}$ $\therefore (2-k^2)x^2+6k^2x-9k^2-1=0$

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{k^2-2}, x_1\cdot x_2=\dfrac{9k^2+1}{k^2-2}$

$\because M$ 为 BC 的中点，$\therefore \overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$ $\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$

$\therefore x_1x_2+k^2(x_1-3)(x_2-3)=0$ $\therefore (1+k^2)x_1x_2-3k^2(x_1+x_2)+9k^2=0$

$\therefore (1+k^2)\dfrac{9k^2+1}{k^2-2}-3k^2\dfrac{6k^2}{k^2-2}+9k^2=0$ $\therefore k=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ $\therefore l: x\pm 2\sqrt{2}y-3=0$

生 3 思路：利用$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$, 可得$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

设直线l: $x-3=my$，建立m的方程，可求得m

生 3 解法：设直线l: $x-3=my$ $\because \begin{cases} x=my+3 \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases}$ $\therefore (2m^2-1)y^2+12my+17=0$

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-12m}{2m^2-1}, y_1\cdot y_2=\dfrac{17}{2m^2-1}$

$\because M$ 为 BC 的中点，$\therefore \overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$ $\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$

$\therefore (m^2+1)y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9=0$

$\therefore (m^2+1)\dfrac{17}{2m^2-1}+3m\dfrac{-12m}{2m^2-1}+9=0$ $\therefore m=\pm 2\sqrt{2}$ $\therefore l: x\pm 2\sqrt{2}y-3=0$

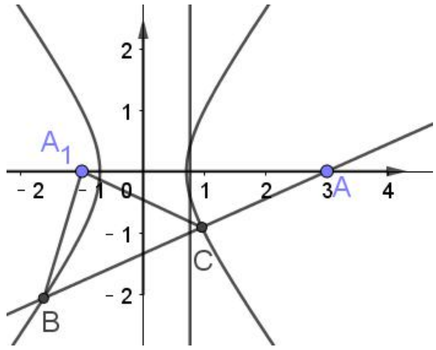
教师评析：几何特征“以BC为直径的圆经过原点”的本质是$OB\perp OC$，三位学生用他们不同背景表征问题，转化为两种不同的代数形式。方法 1 是已知$\angle BOC=90^O$形成的常规的思维定式。由于需要通过韦达定理求出BC的中点M的坐标，弦长公式求出BC的弦长,还需要距离公式求得OM的长，运算较繁琐。方法 2 和 3 都是利用韦达定理和方程思想得到直线l的方程。区别是直线l的方程设法不同，方法 3 避免了直线方程的分类讨论，运算量小。

教学反思：通过本题展示常规问题的不同的解法，三种解法都是一轮复习后的惯性体现，而合理表征问题，优化解题方略成为化解圆锥曲线运算繁点的关键，通过实例教师引导学生巩固这样的认识。

问题 2：若 $A'(-1,0)$, $|A'B|=|A'\mathrm{C}|$, 求直线 l 的方程.

生 4 思路：$|A'B|=|A'\mathrm{C}|$可知A'在BC的中垂线上，设M 为BC的中点，

则 $k_{A'M}\cdot k_{BC}=-1$ 即 $k_{A'M}\cdot k_{AM}=-1$

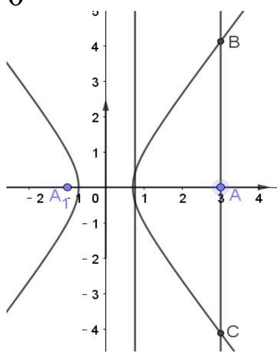


生 4 解法：设 BC 的中点为 $M(x,y)$，$\therefore \overrightarrow{A'M}\perp\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{A'M}\perp\overrightarrow{AM}\ \therefore k_{A'M}\cdot k_{AM}=-1\ \therefore \dfrac{y}{x+1}\cdot\dfrac{y}{x-3}=-1$

$\therefore y^2=-(x^2-2x-3)$ ①设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$

$\because \begin{cases}2{x_1}^2-{y_1}^2=1\\2{x_2}^2-{y_2}^2=1\end{cases}\ \therefore 2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$



$\therefore 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)k_{BC}=0\ \therefore 2\cdot2x-2y\cdot\dfrac{y}{x-3}=0$ ②

①②联立，$\therefore -(x^2-2x-3)=2x(x-3)\ \therefore 3x^2-8x-3=0$

$$\because \begin{cases}x=3\\y=0\end{cases} or \begin{cases}x==-\dfrac{1}{3}\\y=\pm\dfrac{2\sqrt5}{3}\end{cases}\ \therefore M(3,0)\,\text{or}\,M(-\frac{1}{3},\pm\frac{2\sqrt5}{3})$$

$\because 2x-y\cdot k_{BC}=0\ \therefore k=\pm\dfrac{\sqrt5}{5}\ or\ k$ 不存在 $\therefore l:y=\pm\dfrac{\sqrt5}{5}(x-3)orx=3$

生 5 解法：设直线 l：$x-3=my$

$\begin{cases}x=my+3\\2x^2-y^2=1\end{cases}\ \therefore (2m^2-1)x^2+12my+17=0$

$\therefore y_M=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)=-\dfrac{6m}{2m^2-1}\ \therefore x_M=my_M+3=\dfrac{-3}{2m^2-1}$

$\therefore M(-\dfrac{3}{2m^2-1},-\dfrac{6m}{2m^2-1})\ \because A(-1,0)\ \therefore \overrightarrow{AM'}=(\dfrac{2m^2-4}{2m^2-1},-\dfrac{6m}{2m^2-1})$

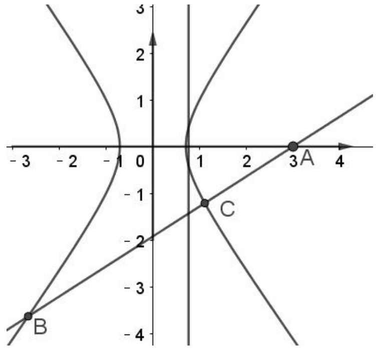
$l:\vec{d}=(m,1)\ \because \overrightarrow{AM'}\cdot\vec{d}=0\ \therefore \dfrac{(2m^2-4)m}{2m^2-1}-\dfrac{6m}{2m^2-1}=0$

$\therefore m=0orm=\pm\sqrt5$

教师评析：学生转化为 $|A'B|=|A'C|$ 的代数形式，给计算带来了繁琐和难度，显然不是明智之举。$|A'B|=|A'C|$ 的本质是 A' 在 BC 的中垂线上，代数形式表示可以是 $k_{A'M}\cdot k_{BC}=-1$ 即

$k_{A'M}\cdot k_{AM}=-1$(M 为 BC 中点)或 $\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$ 即 $\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$.

问题 3：若 $|AB|=\frac{3}{2}|BC|$,求直线 l 的方程.



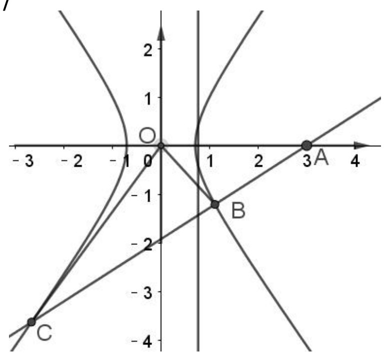
生 6 解法：直线交双曲线的两支，可得 $|AC|=3|AB|$

结合平面图形性质(平行线对应线段成比例)，$y_C=3y_B$

$$\therefore\begin{cases}y_C+y_B=4y_B\\ y_C\cdot y_B=3{y_B}^2\end{cases}\therefore\frac{3}{16}(y_C+y_B)^2=y_C\cdot y_B$$

$$\therefore\frac{3}{16}(-\frac{12m}{2m^2-1})^2=\frac{17}{2t^2-1}\therefore m^2=\frac{17}{7}\therefore l:x-3=\pm\sqrt{\frac{17}{7}}y$$

问题 4：若 $s_{\Delta AOB}:s_{\Delta BOC}=1:2$，求直线 l 的方程.

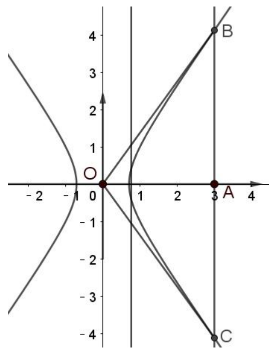


生 7 解法：直线交双曲线的两支，可得 $|AC|=3|AB|$

结合平面图形性质，$y_C=3y_B\therefore\begin{cases}y_C+y_B=4y_B\\ y_C\cdot y_B=3{y_B}^2\end{cases}$

$$\therefore\frac{3}{16}(y_C+y_B)^2=y_C\cdot y_B\therefore\frac{3}{16}(-\frac{12m}{2m^2-1})^2=\frac{17}{2t^2-1}$$

$$\therefore m^2=\frac{17}{7}\therefore l:x-3=\pm\sqrt{\frac{17}{7}}y$$



生 8 补充：直线交双曲线的同支，可得 $|AB|=|AC|\therefore l:x=3$

教师评析：同底或同高的三角形面积比可转化为边长的比，本问题中由于 A 点在 x 轴的特殊位置，利用平面图形的性质中很容易得到 B,C 的纵坐标的比值。此问题较容易遗漏直线与双曲线的相交的不同情况，课堂中通过学生的补充完善了解法。已知同一条直线上线段的数量关系，可由已知的几何条件转化为代数结论得到：$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}\therefore\begin{cases}x_C-3=3(x_B-3)\\ y_C=3y_B\end{cases}$

由 $y_C=3y_B$ 得到 $\begin{cases}y_B+y_C=4y_B\\ y_B\cdot y_C=3{y_B}^2\end{cases}$，从而得到 $3(y_B+y_C)^2=16y_By_C$,再利用韦达定理可得到直线 l 的方程。

3、归纳提炼、整合方法

几何条件合理的转换成代数语言，是突破解析几何问题的关键。以本课的例题为背景，归纳总结下

常见的几何条件与代数语言的转化。

几何条件	本质特征	代数关系
以 BC 为直径的圆经过原点	$OB \perp OC$	$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
$\lvert A'B\rvert = \lvert A'C\rvert$	等腰三角形三线合一	$k_{A'M} \cdot k_{BC} = -1$ 或 $\overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{BC} = -1$
$\lvert AB\rvert = \frac{3}{2}\lvert BC\rvert$	共线的线段比即 向量的数乘关系 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$	$\begin{cases} x_2 - 3 = 3(x_1 - 3) \\ y_2 = 3y_1 \end{cases}$
$s_{\Delta AOB} : s_{\Delta BOC} = 1:2$	等高的三角形底边的比为 1:2 即 A 为 BC 的中点或 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$	$x = 3$ 或 $\begin{cases} x_2 - 3 = 3(x_1 - 3) \\ y_2 = 3y_1 \end{cases}$
E 为右顶点，$\angle BEC$ 的角平分线为 x 轴	AB, AC 关于 x 轴对称	$k_{BE} + k_{CE} = 0$
OB, OC 为邻边做平行四边形 $OBCP$，P 在双曲线上	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_P \\ y_1 + y_2 = y_P \end{cases}$

在几何问题代数化的转化中，灵活的运用斜率、向量、坐标和方程的思想解决垂直、相等、曲线相交等问题。为了减少运算量，尽可能避免两点间距离公式的使用。

4、拓展应用、完善建构

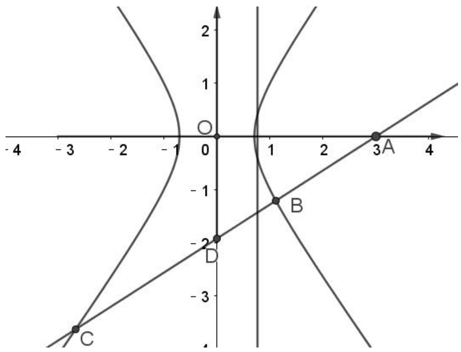
问题 5：若直线与 y 轴相交于点 D，且 $\lvert AB\rvert, \lvert AD\rvert, \lvert AC\rvert$ 成等比数列，求直线 l 的方程.

生 9 解法：设直线 l: $y = k(x-3)$

$\because AD^2 = AB \cdot AC$ 由图可知 ${y_D}^2 = y_B \cdot y_C$

$\because D(0, -3k) \therefore (-3k)^2 = y_B \cdot y_c$

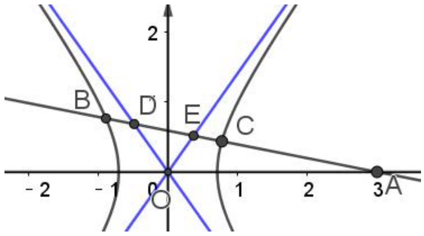
$\therefore (-3k)^2 = \dfrac{17}{2(\frac{1}{k})^2 - 1} \therefore k = \pm\dfrac{1}{3}$



教师评析：$AD^2 = AB \cdot AC$，结合图形中平面图形性质，不难发现 ${y_D}^2 = y_B \cdot y_C$，再利用韦达定理的两根之积，很容易得到斜率的方程，从而解出斜率 k。通过形助数找到了数量关系的突破口，再通过数

辅助形使问题得到解决。经历了数—形—数的思维过程，体现了圆锥曲线中的数形相依。为巩固上述思维方法，可以做以下变式。

问题5变式练习：设直线l与双曲线C_1的渐近线相交于D,E，且$|BD|,|\mathrm{DE}|,|\mathrm{EC}|$成等差数列，求直线$l$的方程.



教师引导学生思考：$\because 2\mathrm{DE}=BD+\mathrm{EC}\ \therefore 3\mathrm{DE}=BD+\mathrm{EC}+\mathrm{DE}$

即$3\mathrm{DE}=B\mathrm{C}$，通过弦长公式分别求出$|\mathrm{DE}|,|\mathrm{BC}|$,

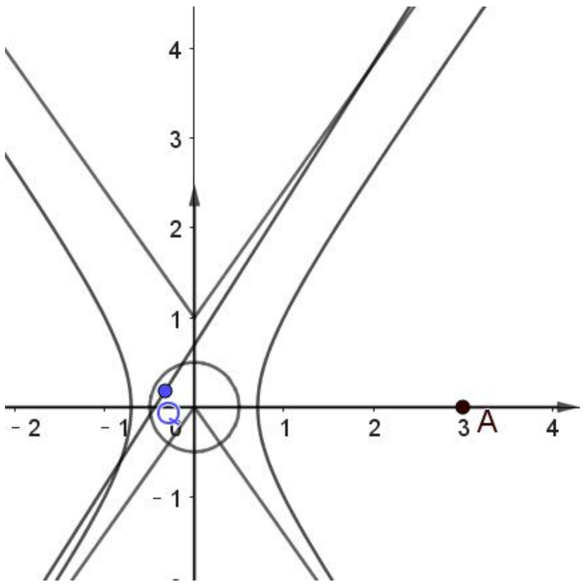
从而求得直线l的斜率。

解题过程可留给学生作为回家作业，详细推导计算。

问题6：设曲线$C_2:|y|=\sqrt{2}|x|+1$，在圆$x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$内存在点Q，使经过点Q的直线与曲线C_1,C_2都相交，求直线的斜率k的取值范围.

教师引导思考：$C_2:|y|=\sqrt{2}|x|+1$，关于x,y轴，原点对称的图形，只需要考虑$l_1:y=\sqrt{2}x+1$满足条件的情况，再推得k的取值范围.

解：设直线：$y=kx+b$ $\because$直线与C_2相交$\therefore |k|>\sqrt{2}$



$$\because \begin{cases} y=kx+b \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases} \therefore 2x^2-(kx+b)^2=1$$

$$\therefore (2-k^2)x^2-2kbx-b^2-1=0$$

$$\therefore \begin{cases} \Delta\ge 0 \\ 2-k^2\ne 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} b^2\ge \dfrac{1}{2}(k^2-2) \\ k^2\ne 2 \end{cases}$$

$$\because \text{直线与圆相交} \therefore \frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}\le \frac{1}{2}\ \therefore b^2\le \frac{1}{4}(k^2+1)$$

$$\therefore \frac{1}{4}(k^2+1)\ge \frac{1}{2}(k^2-2)\ \therefore k^2\le 5\ \therefore 2\le k^2\le 5$$

教师评析： 本问题是由2013年的上海高考改编的一个问题，综合运用了数—形——数的思维方法，一开始通过图形的分析找到了问题的突破口，再利用数的分析考虑直线和双曲线相交应满足的条件，从而求出直线的斜率k的取值范围。

六、教学思考

通过本堂课的教学，笔者对圆锥曲线中的形数转化加深了理解，对高三二轮复习课也有了进一步的体

会。

几何问题代数化是解析几何的根本思想。不知几何条件如何转换成代数语言，是造成解析几何难学的原因之一。将常见的几何条件通过题组设计归纳，教会学生根据已知条件，认清问题本质，合理选择代数形式，突破解题的难点。

解析几何着重于用代数方法研究几何问题，往往给我们造成一种错觉——习惯于用代数方法研究几何问题，忽视几何手段的运用．其实解析几何的基本思想就是数形结合，通过“数”与“形”之间的对应和转换来解决数学问题。本课中问题 5 和问题 6 的思路需要经过数-形-数，用几何语言解释条件中的数量关系，简化了计算，再将加工后的几何语言转化为代数的形式。让学生亲历这样的思维过程，体会数形相依的应用，让解题变得别有风味。

在高三复习课的专题复习以突出重点、突破难点为主要任务。复习课的内容是复习已经学过的知识，在此基础上总结提炼方法，温故知新。如何把课堂交给学生,体现生本课堂的理念。在课堂教学中充分调动每位学生的积极性,重视每位学生的思维参与,注重思维品质,让学生在课堂教学中展示解题过程,充分暴露思维过程,唤起学生对数学问题“火热”的思考。作为教师，在课堂教学中成为学生学习活动的组织者、引导者、合作者。朝着这样的目标，我将不断努力与践行。