多视角下微专题复习课的实践与思考

——一节高三数列复习课的教学设计与思考

摘要： 高三复习课是高中数学课堂教学的重要组成部分，不是已学知识的简单重复和再现，而是要把带有某种规律性的知识进行归纳整理，提供多维度的视角，从而加深学生对知识和方法的理解和融会贯通。研究者以一节“以斐波那契数列为背景,借助数列的递推关系直接研究数列的变化规律及相关性质”的微专题复习课为例，为学生提供不同视角下的数列问题解决方法，提高学生的数学复习效果，在课堂教学中推进和落实数学核心素养，让学生在解决问题的过程中提升相关数学核心素养，渗透数学文化。

关键词: 归纳整理，微专题复习课，数列

一、教学分析

在新课标中，数列被划分为函数主线中，《普通高中数学课程标准（2017年版 2020 年修订)》提出，数列是一类特殊的函数，是数学重要的研究对象，是研究其他类型函数的基本工具，在日常生活中有着广泛的应用[i]。

数列的通项公式对于数列来说十分重要，由数列的递推关系求通项公式是高三复习课中的重点和热点问题，许多一线教师也总结了求数列通项公式的基本方法[2]。

不过，我们在处理问题的过程中，有时候也会遇到已知数列的递推关系，用已有的知识体系不太好求通项公式，或者即使求出通项公式，对解决问题也帮助不大的情况。其实数列的递推关系作为区别于函数解析式的其独有的特性，其本身已经在某种程度上刻画了数列的生成和变化规律。所以有时候不拘泥于数列的通项公式，通过数列的递推关系这一“利器”，会为我们打开新的大门。在近几年的高三一模中，已经出现了不借助数列通项公式，直接使用数列递推关系来研究数列性质的素材，比如 2018 徐汇一模第 10 题研究了数列和，2019 浦东一模 11 题研究了数列极限。

值得一提的是，徐汇一模卷第 10 题是以数学史上非常著名的斐波那契数列为背景的，这个数列对于学生来说不算陌生，它出现在沪教版高中数学教材选

择性必修 4——4.3 数列的课后阅读材料中。阅读材料中给出了其背景和递推关系，并直接给出了通项公式和斐波那契数列中任一给定项与其后一项的比值无限趋近于黄金比例$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$这个结论。斐波那契数列是一个非常美丽而神奇的数列，比如在自然界中，植物中的花瓣、叶片、果籽数大多与斐波那契数列相吻合[3]，在数学领域中，黄金分割与斐波那契数之间存在着某种联系[4]，甚至一些有趣的生活问题也可以通过数学建模，用斐波那契数列来解决[5]。

在实际教学中，如果涉及到了斐波那契数列，教师一般会将重点放在斐波那契数列的通项公式上，并挑选它的一些性质进行探究[6]。对于有竞赛基础或者事先研究过相关类型通项求法的学生来说，斐波那契数列的通项公式是方便求得的，而且我们确实可以用不同的方法来求斐波那契数列的通项公式[7]，但这对于大多数学生来说还是具有一定挑战的。

鉴于此，笔者设计了一节以斐波那契数列为背景的数列递推关系高三复习课，希望能做到以学生发展为本，落实立德树人根本任务，提升学生数学学科核心素养，强调数学与生活以及其他学科的联系，同时也希望渗透数学文化，引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

二、教学过程

1. 引例

（1）楼梯问题

问题：某同学走楼梯，每步只能跨上一级或者两级楼梯，该同学要登上 10 级楼梯，共有多少种不同的走法？

分析：设a_n表示登上第n级楼梯的不同走法，依据题意，则$a_1=1,a_2=2$，且$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq 3,n\in N^*)$（最后一步跨一级的方法数加上最后一步跨两级的方法数），易得$a_{10}=89$

设计意图：针对本节复习课的知识，选取生活中熟悉的楼梯问题作为课堂引入，易于学生接受和理解，也能激发学生的学习兴趣。这是一个生活实际问题，在解答过程中，用数列模型解决了实际问题，彰显了用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界的数学教育价值，体现了数学建模的数学核心素养。此题揭示了数列递推关系对于观察数列、理解数列所具备的独特价值，并为斐

波那契数列的引入做好了铺垫。

（2）历史材料

斐波那契（Leonardoda Fibonacci）是意大利的数学家，在 1202 年，他撰写了《算盘全书》(Liber Abacci)，书中以兔子繁殖为例子最早研究斐波那契数列，这个数列从第 3 项开始，每一项都等于前两项之和，它的递推关系是 $a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in N^*\right)$，这和楼梯问题中所涉及的递推关系有强烈的关联。

设计意图：斐波那契数列历史上是一个著名的数列，在楼梯问题之后简单介绍斐波那契数列的数学史，可以增加学生的学习动机，保持学习兴趣，给予数学以人文的一面，提供探索的机会，同时渗透数学文化[8]。

2.精选例题，有机结合

在选择例题和练习题的过程中，第一考虑的是希望这些题可以引导学生形成一种新的思路，遇到数列的递推关系并不是一味地先求通项公式，再由通项公式研究性质，而是有一种直接利用递推关系去研究数列性质的眼光。本节课主要选取的数列性质为和，极限和单调性，由于时间关系，周期性不在本节课的设计中。当然，如果只是以上三个角度铺开，仅用分类的题目去呈现，则少了串联和驱动。所以本堂课以神奇的斐波那契数列为引子，将其作为绳子，将递推关系所研究的三个角度串在一起，形成一个有机的整体。所以，在本堂课的例题设计过程中，明线是在研究斐波那契数列的和，极限以及单调性，暗线其实是在提供一种以递推关系为主要抓手，研究数列性质的路径和思路。

（1）递推关系研究数列和

例 1.（源自 2018 徐汇一模第 10 题）

著名的斐波那契数列 $\{a_n\}:1,1,2,3,5,8,\cdots$，满足 $a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in N^*\right)$，那么 $1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2017}$ 是斐波那契数列中的第_______项.

分析：斐波那契数列的通项公式为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，显然通过递推关系直接求出此通项公式对于学生来说有一定的挑战，而即使成功得到

了通项公式，此题中的和也并不能轻松地通过通项公式来求得，所以需要引导学生转变思维。数列的通项公式固然重要，但有时它在解决问题的过程中也并非是必不可少的，善用递推关系，有时对于我们认识数列，研究数列会有奇效。

解法 1：归纳猜想

从特殊到一般，培养归纳猜想的能力

$1+a_3=1+2=3$……3 是斐波那契数列中的第 4 项

$1+a_3+a_5=1+2+5=8$……8 是斐波那契数列中的第 6 项

$1+a_3+a_5+a_7=1+2+5+13=21$……21 是斐波那契数列中的第 8 项

$1+a_3+a_5+a_7+a_9=1+2+5+13+34=55$……55 是斐波那契数列中的第 10 项

……

$1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2017}$是斐波那契数列中的第 2018 项

解法 2：等值替换（学生课上提供）

考虑到斐波那契数列递推关系的核心是研究连续三项之间的关系，而 $a_1=a_2=1$，所以将1替换成a_2，可以构造出连续两项，进而触发连锁反应：

$1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2017}$

$=a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2017}$

$=a_4+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2017}$

……

$=a_{2016}+a_{2017}$

$=a_{2018}$

解法 3：裂项相消

由于 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in N^*)$，即 $a_{n+1}=a_{n+2}-a_n(n\in N^*)$

则$1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2017}$

$=1+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+(a_8-a_6)+(a_{10}-a_8)+\cdots+(a_{2018}-a_{2016})$

$=1-a_2+a_{2018}$

$=a_{2018}$

提炼一般结论：在斐波那契数列 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}(n\in N^*)$

设计意图：通过一道一模卷的真题，给学生提供解决数列问题的不同视角。当学生遇到有关数列的大数据问题时，很有可能会像法一一样采取先枚举，再归纳猜想的方法来得到答案，这体现了从特殊到一般的数学思想方法，也体现了数据分析的数学核心素养。方法二的核心是紧扣递推关系中出现的相邻两项的和以及 a_1 与 a_2 的等效，形成如多米诺骨牌一般的连锁反应，这样的思想在组合数的求和中时常出现，其实对学生来说并不陌生。方法三的核心是观察到最终形态是斐波那契数列中的某一项，那这样的和式一定是“障眼法”，会有抵消的部分。所以通过递推关系的变形，构造出差的形式，并随着相加，达到了相消的目的，留下局部的具体项。

练 1. （改编自例 1）

著名的斐波那契数列 $\{a_n\}:1,1,2,3,5,8,\cdots$，满足 $a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in N^*\right)$，那么 $\dfrac{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2+\cdots+{a_n}^2}{a_n}$ 是斐波那契数列中的第_______项.

分析：斐波那契数列的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，和例 1 相同，通过递推关系直接求出此通项公式对于学生来说有一定的挑战，而即使成功得到了通项公式，此题中的平方和也并不能轻松地通过通项公式来求得，所以依然需要引导学生转变思维，感受递推关系在研究数列性质过程中的妙用。

解法 1：归纳猜想（学生课上提供）

当 $n=1$ 时，$\dfrac{{a_1}^2}{a_1}=1\cdots\cdots 1$ 是斐波那契数列中的第 1 项或第 2 项

当 $n=2$ 时，$\dfrac{{a_1}^2+{a_2}^2}{a_1}=2\cdots\cdots 2$ 是斐波那契数列中的第 3 项

当 $n=3$ 时，$\dfrac{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}{a_1}=3\cdots\cdots 3$ 是斐波那契数列中的第 4 项

当$n=4$时，$\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}}{a_1}=5$……5是斐波那契数列中的第5项

当$n=5$时，$\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}}{a_1}=8$……8是斐波那契数列中的第6项

则猜测$\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}$为斐波那契数列中的第$n+1$项

解法2：等值替换（学生课上提供）

$$\frac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}$$

$$=\frac{a_1a_2+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}=\frac{a_2(a_1+a_2)+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}$$

$$=\frac{a_2a_3+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}=\frac{a_3(a_3+a_2)+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}$$

$$=\frac{a_3a_4+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}=\frac{a_4(a_3+a_4)+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}$$

……

$$=\frac{a_n(a_n+a_{n-1})}{a_n}=\frac{a_na_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}$$

所以$\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}$为斐波那契数列中的第$n+1$项

解法3：裂项相消（学生课上提供）

构造平方和连续两项的差值

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \Rightarrow a_{n+2}-a_n=a_{n+1} \Rightarrow a_{n+2}a_{n+1}-a_na_{n+1}=a_{n+1}^{\ 2}$

则$a_3a_2-a_2a_1=a_2^{\ 2}$，$a_4a_3-a_3a_2=a_3^{\ 2}$，$a_5a_4-a_4a_3=a_4^{\ 2}$，$a_6a_5-a_5a_4=a_5^{\ 2}$

……$a_{n+1}a_n-a_na_{n-1}=a_n^{\ 2}$

累加可得$a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}=a_{n+1}a_n-a_2a_1$

又因为$a_1^{\ 2}=a_2a_1$，所以$a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}=a_{n+1}a_n$

即$\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{a_n}=a_{n+1}$，为斐波那契数列中的第$n+1$项

解法4：几何意义

以$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=8\times13$为例，通过寻找等式左右两边的几何意义，如图 1，将大矩形的面积二次表示，一次为各小矩形面积之和，一次为大矩形的长宽之积，从而形成“无字证明”，再将其一般化即可得答案。

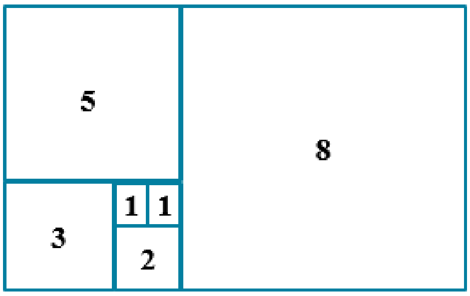

图 1

提炼一般结论：

斐波那契数列满足 $a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 3}+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}=a_n\cdot a_{n+1}(n\in N^*)$

设计意图：

①通过一道例 1 的变式题，从研究斐波那契数列的和转向研究其平方和，再次体现了直接利用递推关系来研究数列性质的便利性。前 3 种解法和例 1 的解决方法如出一辙，而值得一提的是解法 4，若引导恰当的话，学生是能从平方和中想到正方形面积，从而想到拼接的。解法 4 借助几何图形描述、分析数学问题，建立形与数的联系，形成数学直观，在具体的图形中感悟事务的本质，体现了直观想象的数学核心素养。

②解法 4 不仅体现了数形结合的数学思想，彰显思维之美，还蕴含了著名的“斐波那契螺线”（图 2—图 4），其在艺术、建筑、自然中也时常出现（图 5—图 7），可引导学生用数学的眼光欣赏世界，发现世界中所蕴含的数学之美，感悟数学的审美价值，渗透数学文化。

③“斐波那契螺线”又称“黄金螺线”，为例 2 所研究的斐波那契数列中隐藏的“黄金分割”埋下伏笔，形成缜密的研究逻辑。

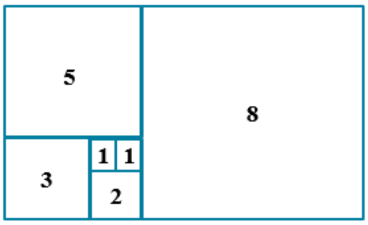

图 2

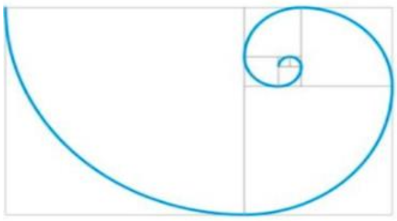

图 3

图 4

图 5

图 6

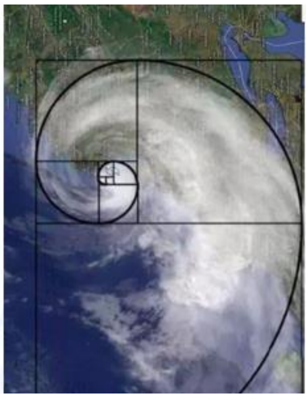

图 7

（2）递推关系研究数列极限

“斐波那契螺线”又称“黄金螺线”，“斐波那契数列”又称“黄金分割数列”，这是为什么呢？

例 2. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in N^*\right)$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=A$，求 $A=$__

解法 1：若在已知斐波那契数列通项公式$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$的前提下，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]}{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]}$$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]}{\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]}=\frac{1-0}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-0}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

即 $A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

解法 2： 由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 得 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ （$a_{n+1}\neq 0$）

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=A$, 所以对上式两边取极限，由于 $A\neq 0$，则 $\dfrac{1}{A}=1+A$

解得 $A=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $A=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

又斐波那契数列中每项均为正数，则 $A=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 舍去

故 $A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

设计意图： 通过求出在 n 趋近于无穷大时斐波那契数列前一项与后一项的比的极限，寻找到黄金分割，解开“黄金分割螺线”和“黄金分割数列”这两个名称上的疑惑，培育科学精神。

解法一看起来直接由斐波那契数列的通项公式求出极限，是一种直接且自然的想法，但是其前提依然是学生需要由走一段比较艰难的路——由斐波那契的递推关系求出通项公式。解法二则依然紧扣本堂课的重点，避其锋芒，不求通项公式，直接由递推关系，通过同除构造两边取极限的方式，巧求极限。在明晰运算对象的基础上，依据运算法则，探究运算思路，求得运算结果，解决数学问题，进一步发展数学运算能力，也体现了数学运算的数学核心素养。

练 2：（源自 2019 浦东一模第 11 题）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $na_{n+2}=1007(n-1)a_{n+1}+2018(n+1)a_n$ $(n\in N^*)$，且 $a_1=1,a_2=2,$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A,$ 则 $A=$_______.

解法 1： 由 $na_{n+2}=1007(n-1)a_{n+1}+2018(n+1)a_n$ 两边同除 na_{n+1} 得：

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1007(1-\frac{1}{n})+2018(1+\frac{1}{n})\frac{a_n}{a_{n+1}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}[1007(1-\frac{1}{n})+2018(1+\frac{1}{n})\frac{a_n}{a_{n+1}}],$$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A$，$\therefore A=1007+\dfrac{2018}{A}$，解得：$A=1009$ 或 $A=-2$，$\because a_n>0$，$\therefore A=1009$.

设计意图：这是一道浦东新区的一模真题，增强学生的学习体验，此题由学生现有的知识体系，是难以求出数列通项公式的，所以再次回归本节课的重点——不求通项公式，由递推关系直接研究数列性质，类似于例 2 的解法 2，即可轻松求得答案。

（3）递推关系研究数列单调性

引子：已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in N^*\right)$，研究其单调性.

解法 1：由于$a_{n+2}-a_{n+1}=a_n(n\in N^*)$且$a_n>0$

故斐波那契数列从第 2 项开始单调递增

设计意图：此题若采取先求出通项公式，再比较前后两项大小关系的方法，会非常麻烦。而解法 1 四两拨千斤地解决了问题，使学生从单调性的角度，感受不求通项公式，直接利用递推关系研究函数性质的便捷。

例 3. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=2a_n+\dfrac{2}{a_n}-3$ $(n\in N^*)$，其首项$a_1=a$，若数列$\{a_n\}$是单调递增数列，则实数a的取值范围是___________.

解法 1：由$a_{n+1}-a_n=a_n+\dfrac{2}{a_n}-3>0$，则$a_n\in(0,1)\cup(2,+\infty)$对$n\in N^*$恒成立（*）

易得答案的必要条件为$a_1\in(0,1)\cup(2,+\infty)$

但是通过$a_{n+1}=2a_n+\dfrac{2}{a_n}-3$，发现若$a_1\in(0,1)\cup(2,+\infty)$则$a_2\in(1,+\infty)$不符合（*）式

而由于$(2,+\infty)\subseteq(1,+\infty)$，故将$a_1$的范围缩为$a_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$，可使$a_2\in\left(2,+\infty\right)$

而又因为$a_2\in\left(2,+\infty\right)\Rightarrow a_3\in\left(2,+\infty\right)\Rightarrow a_4\in\left(2,+\infty\right)\Rightarrow\cdots\Rightarrow a_n\in\left(2,+\infty\right)$

故$a\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

解法 2：（学生课后提供）由 $a_{n+1}=2a_n+\dfrac{2}{a_n}-3$ 构造递推函数 $f(x)=2x+\dfrac{2}{x}-3$

$a_{n+1}=f(a_n)=2a_n+\dfrac{2}{a_n}-3$，在直角坐标系中画出 $f(x)=2x+\dfrac{2}{x}-3$ 和 $g(x)=x$

（图 8）

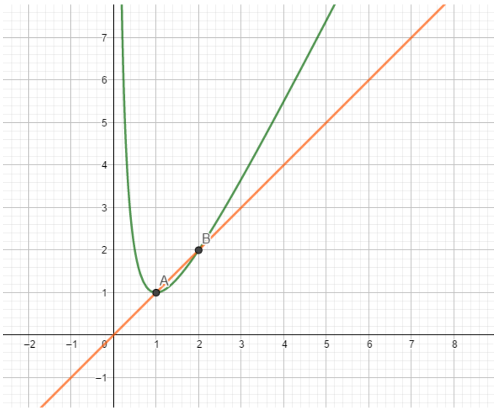

图 8

如图 9，在确定了 x 轴上的起始点 $(a_1,0)$ 后

过点 $(a_1,0)$ 作垂直于 x 轴的直线交 $y=f(x)$ 于点 (a_1,a_2)

过点 (a_1,a_2) 作平行于 x 轴的直线交 $y=x$ 于点 (a_2,a_2)

过点 (a_2,a_2) 作垂直于 x 轴的直线交 $y=f(x)$ 于点 (a_2,a_3)

以此类推，重复上述两步，得到点 (a_n,a_{n+1}) 的去向，从而由图形中展示的关系观察出 $\{a_n\}$ 的单调性

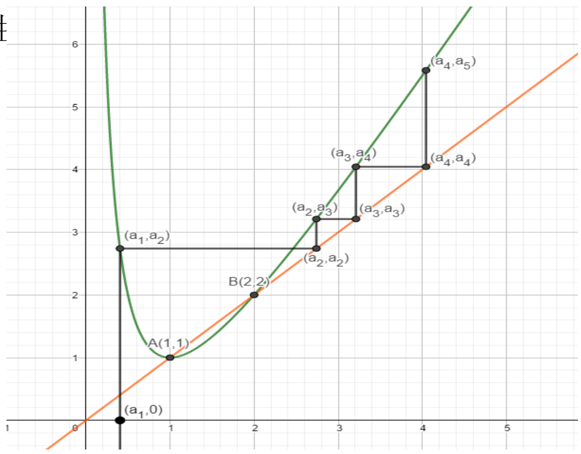

图 9

如图 10 和图 11，当 $a_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ 时 $\{a_n\}$ 单调增，合题意

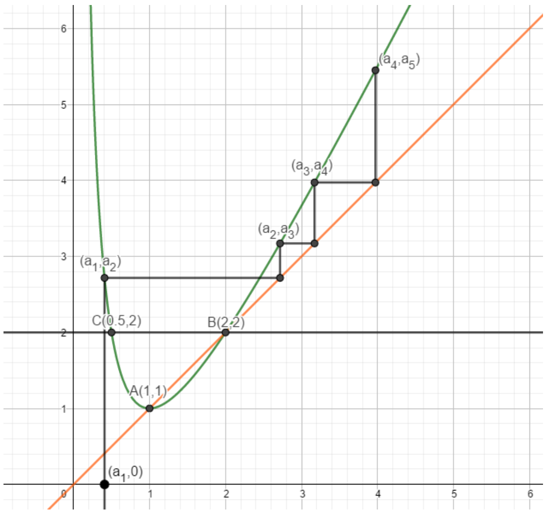

图 10

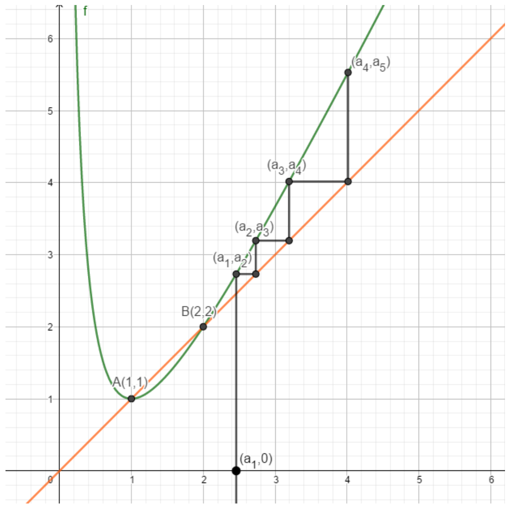

图 11

如图 12 和图 13，当$a_1 \in \left[\dfrac{1}{2},2\right]$时$\{a_n\}$并非单调增，不合题意

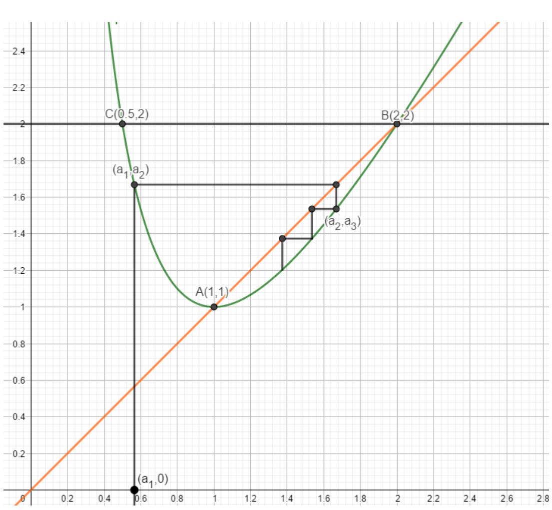

图 12

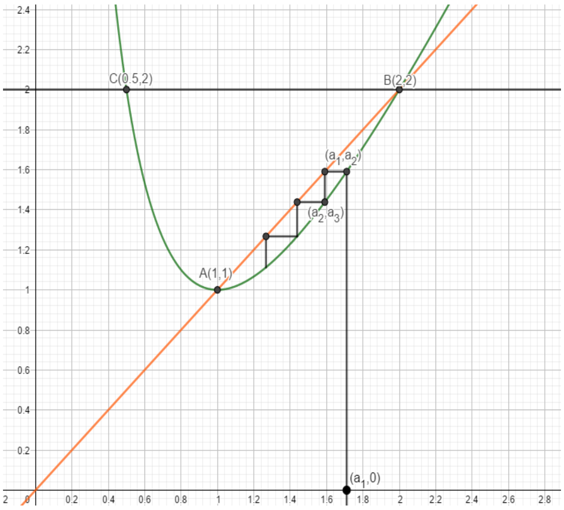

图 13

故$a \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right) \cup (2,+\infty)$

设计意图：此例题想引领学生认识的核心观点依然是当我们发现数列递推关系给定，无法轻松求得通项公式时，直接利用递推关系研究数列单调性是很不错的方法。解法一锻炼学生在比较复杂的情况中把握事物之间的关联，从必要性和充分性的角度形成有条理、合乎逻辑的思维品质和理性精神，体现了逻辑推理的数学核心素养。解法二通过函数迭代的思想，借助直角坐标系中的函数图像刻画点的位置关系、数列的变化过程与运动规律，利用图形描述、分析

数学问题，建立形与数的联系，借助形的直观性帮助理解问题，感悟事物本质，体现了直观想象的数学核心素养。

3.课后探究，思考不止

课后思考一（数列递推关系的其他应用）

本节课通过数列递推关系主要研究了和、极限和单调性，课后可鼓励学生对数列的其他性质进行研究，比如用递推关系研究数列的周期性、有界性等。

课后思考二（斐波那契数列的通项公式）

本节课通过斐波那契数列的递推关系研究了诸多性质，但是学生或许有如鲠在喉的感觉，毕竟研究数列性质并不能完全满足我们对于递推关系的期待，我们还是希望能得到其通项公式的。所以课后可以鼓励学生对斐波那契数列进行进一步研究，尝试用不同方法求出它的通项公式。

课后思考三（斐波那契数列的其他性质）

其实，从斐波那契数列研究起到其命名就已经经历了几百年的历史，而因其于生活，自然，数学中随处可见，美国数学会创立了杂志《斐波那契数列季刊》，使得许多数学家和数学爱好者们前仆后继地投入到了此数列的研究中。除了本节课提到的黄金分割以及几个性质外，杨辉三角、算法、物理学、生物学等都与斐波那契数列有关，希望越来越多的学生可以成为研究者！

三、教学反思

微专题复习教学是高三复习课的重要一环，是促使学生由基本能力向综合能力转变的关键一环。本节课以一个生活中的楼梯问题作为课堂引入，易于学生接受和理解，激发学习兴趣。楼梯问题也揭示了数列递推关系对于观察数列、理解数列所具备的独特价值，并为斐波那契数列的引入做好了铺垫。接着，通过例题和练习，引导学生形成一种思路，即遇到数列的递推关系，可以直接由它去研究数列的和，极限和单调性，并以神奇的斐波那契数列作为线索贯穿始终。在解决问题的过程中，涉及到了诸如归纳猜想、等值替换、裂项相消、无字证明等思想与方法，也在不同的解法中体现了逻辑推理、数学建模、直观想象和数学运算数学核心素养。

本节课在以学生发展为本，落实立德树人的根本任务上也有许多涉及。楼梯问题的解答过程中，培养学生用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，

用数学语言表达世界。斐波那契数列的数学史给予数学以人文的一面，提供探索的乐趣和热情。“斐波那契螺线”在艺术、建筑、自然中的体现，引导了学生去发现世界中所蕴含的数学之美，感悟数学的审美价值，渗透了数学文化。《斐波那契数列季刊》和相关背景知识介绍，强调了数学与生活以及其他学科的联系，激发学生研究数学的兴趣，鼓励更多的学生成为研究者，促进学生实践能力和创新意识的发展。

同时，本节课将课堂还给了学生，学生参与度很高，绝大多数的解法都是由学生给出。值得一提的是，课后学生们依然热情高涨，有着诸多思考，其中例 3 的解法 2 就是一名学生在课上有了一定的想法后于课后完善所形成的方法，说明其体会到了数学的研究乐趣。高中数学课程要努力为学生的可持续发展和终身学习创造条件，以学生发展为本，立德树人，提升素养，路漫漫其修远兮，吾将上下而求索！

参考文献：

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S].北京:人民教育出版社,2020:37-38.

[2]袁胜蓝,袁野.高中数学数列通项公式的几种求法[J].六盘水师范学院学报,2019,31(3):117-120.

[3]朱永胜.植物与斐波那契数[J].镇江高专学报,2006,19(1):67-69.

[4]蔡克,吴敏.黄金分割与斐波那契数列[J].九江职业技术学院学报,2003,(3):60

[5]王大力,付玉华.走楼梯与斐波那契数列关系教学研究[J].高教研究,2011,(308):210

[6]李小蛟.能动性:深度教学的品质追求——一节优质展示课“斐波那契数列”课例及反思[J].教育科学论坛,2020,(502):44-46

[7]张新娟.斐波那契数列通项公式的几种求法[J].连云港职业技术学院学报,2008,21(2):28-29.

[8]汪晓勤.HPM:数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017:19