例谈非 1 系数等积式的证明策略

上海民办位育中学

刘楚

2022 年 8 月 15 日

“相似三角形”是初中数学平面几何的重要内容，涉及的问题丰富多彩，素来为数学爱好者津津乐道. 作为几何教学的重要模块，与相似三角形相关的证明和计算在核心素养的培育中承载着重要作用，特别是数学学科核心素养中的逻辑推理能力，学生发展核心素养中的缜密思考、合理选择、勤于反思的科学精神和自主发展能力.

在学生处理相似三角形问题时，经常会遇到一类含等积式条件或者需要证明等积式的问题. 对于式子两边系数均为 1 的线段等积式证明，即 $ab=cd$ 或 $a^2=bc$ 这一基本形式，通常利用比例性质转化为比例式，进而通过平行线性质比例线段、直接构造三角形相似、添加辅助线或等量代换后构造三角形相似、转化为同高或等高的三角形面积关系等解法进行证明.

1　基本等积式模型

1.1　问题呈现

如图 1，已知△*ABC* 中，*AD* 平分∠*BAC*，与 *BC* 交于点 *D*.

（1）若 *AD*=*CD*，求证：*AB*·*CD*=*AC*·*BD*；

（2）若将条件“*AD*=*CD*”去掉，上述结论是否还成立？若成立，请证明，若不成立，请说明理由.

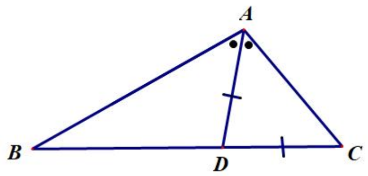

图 1

审题时需要关注关键条件与待证结论，关注图形特征：角平分线、等腰三角形、同一直线上的线段之比，并结合以往解题经验、方法策略展开充分的联想.

1.2　解法探究

第一小题分析：

1.2.1　等量代换构相似

思路：由条件 *AD*=*CD*，易得∠*C*=∠*CAD*. 结合角平分线 *AD*，可见“错 *A* 型”相似，如

图 2，即△BAD∽△BCA. 再分析待证结论，要证 $AB\cdot CD=AC\cdot BD$，即证 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$，对应的△$ABD$ 和△ACD 有一对互补的角，显然不相似. 通过条件 $AD=CD$ 进行等量代换，可以转化为证 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{AD}$，即证△$BAD$∽△$BCA$，问题得以证明.

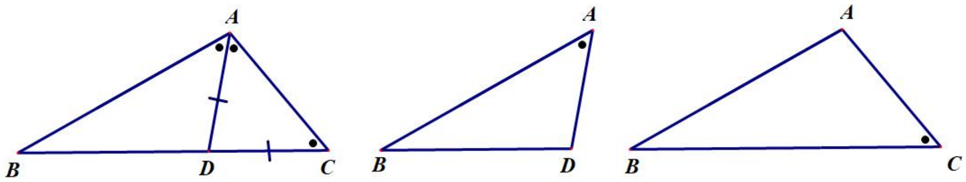

图 2

上述思路需建立在 $CD=AD$ 带来的"错 A 型"相似的基础上，没有这个边等的条件，如图 3，我们又该如何思考呢？

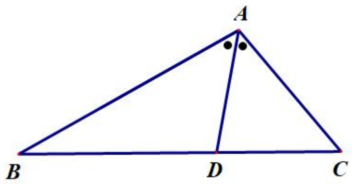

图 3

第二小题分析：

1.2.2 作平行构比例线段

思路：当已知或待证结论中含共线线段比时，如本小题待证结论中含 $\dfrac{BD}{CD}$，往往可以通过添加平行线构造"A 型"相似或"8 型"相似，得到比例线段. 添平行线时分别过点 B、D、C，可以得到六种作平行线的方法.

解法 1，2：过点 B 作平行线

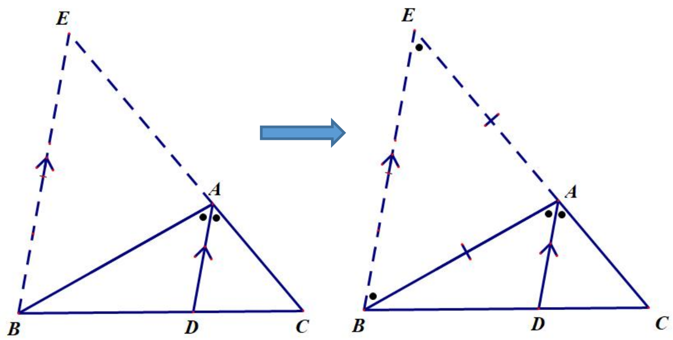

图 4

如图 4，过点 B 作 $BE\parallel AD$，构造"A 型"相似，得 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AE}{AC}$，同时由平行可得∠$E$=∠$CAD$，

故$\angle BAD=\angle ABE$，故 $AE=AB$. 待证结论为$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$，故只需证明 $AE=AB$，得证.

如图 5，过点 B 作 $BE \parallel AC$，构造“8 型”相似，得$\frac{BD}{CD}=\frac{BE}{AC}$，同时由平行可得$\angle E=\angle CAD$，故$\angle BAD=\angle E$，故 $BE=BA$. 待证结论为$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$，故只需证明 $BE=BA$，得证.

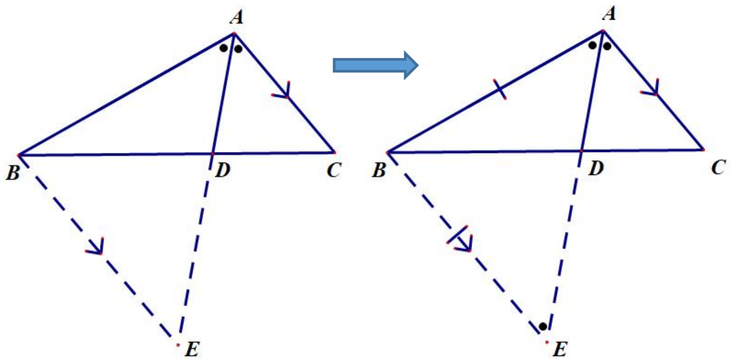

图 5

解法 3-6 思路同上，辅助线如图 6，具体过程请读者自行完成.

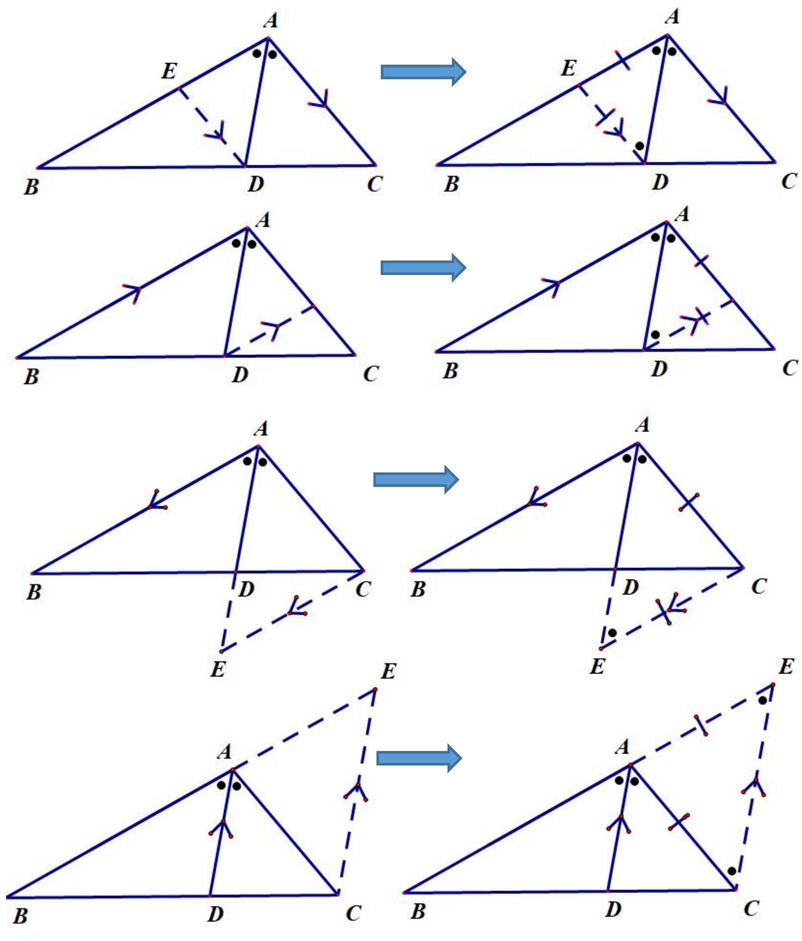

图 6

1.2.3　作垂线构面积比

思路： 待证结论中含 $\dfrac{BD}{CD}$，而 BD 和 CD 为同一直线上的两条线段，故可以考虑转化为面积问题来解决，利用同高（或等高）三角形面积之比等于底边之比. 同样这两个三角形，可以变换底和高，结合角分线性质，可知 D 到 $\angle BAC$ 两边的距离相等，恰好为这两个三角形的高，故问题得以解决.

解法 7： 如图，过 A 作 $AH\perp BC$ 于 H，则 $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}BD\cdot AH}{\frac{1}{2}CD\cdot AH}=\dfrac{BD}{CD}$. 又过 D 作 $DM\perp AB$ 于 M，作 $DN\perp AC$ 于 N，由于 AD 平分 $\angle BAC$，根据角平分线性质定理可得 $DM=DN$，从而 $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot DM}{\frac{1}{2}AC\cdot DN}=\dfrac{AB}{AC}$，得证.

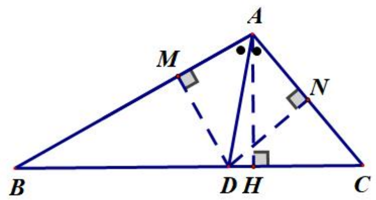

图 7

1.3　解法归纳

以上三种思路，为证明线段等积式的基本方法. 本题还可以从 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 有一对等角，一对互补角这一条件出发，通过作弧，使 $CD=CE$，E 为 AD 上一点，通过等边对等角进而构造一对相似三角形进行证明. 这样的思路下同样有两种解法，感兴趣的读者可以加以尝试.

2　非 1 系数等积式模型

教学实践表明，经过一段时间的练习与反思，学生往往能较好地掌握基本等积式模型的证明. 而对于式子中出现非 1 系数的等积式证明，学生往往感到困难，没有方向，甚至于无从下手.

2.1　问题呈现 1

如图 8，在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是边 BC 上的中点，过点 C 作 $CE\perp BC$，交 BA 的延长线于点 E，过点 B 作 $BH\perp AC$，交 AD 于点 F，交 AC 于点 H，交 CE 于点 G. 求证：$BC^2=4DF\cdot DA$.

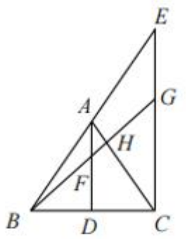

图 8

审题时仍然关注关键条件与待证结论，关注图形特征：等腰三角形、底边中点、两条高，结合以往解题经验、方法策略展开充分的联想，对于结论中 4 的处理是本题的关键. 为后续解法探究陈述方便，将审题时的联想过程以思维导图形式展示如图 9，并将联想得到的结论标入图中，如图 10.

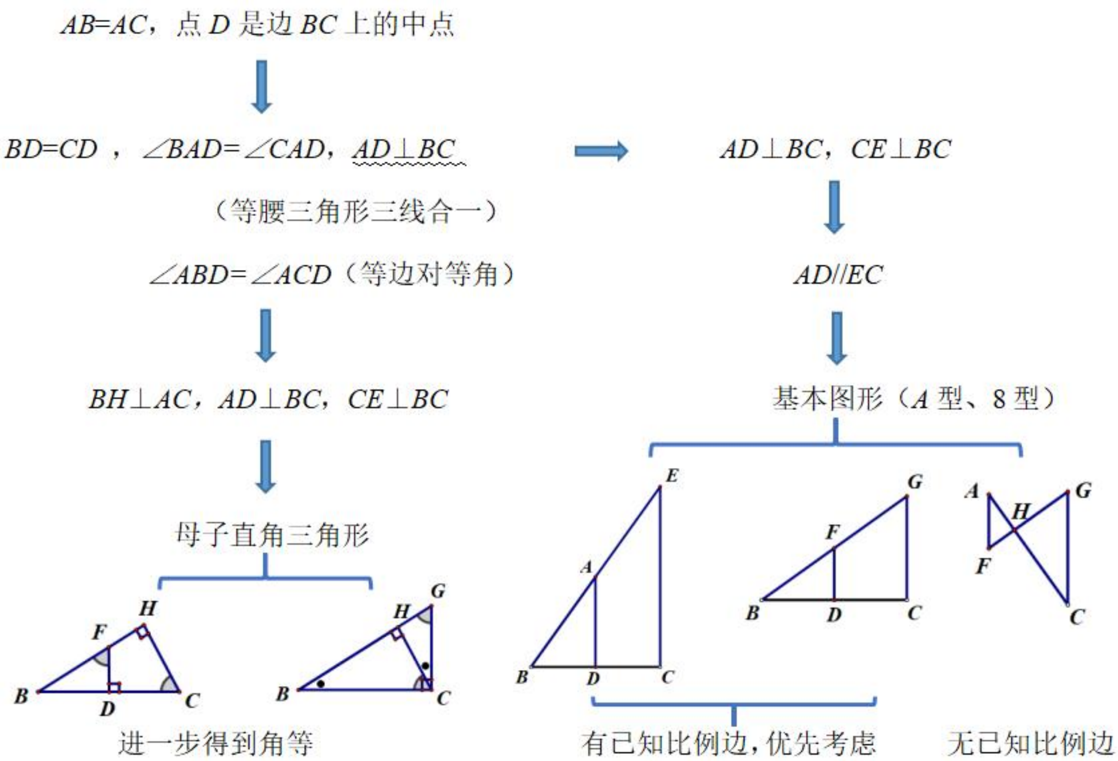

图 9

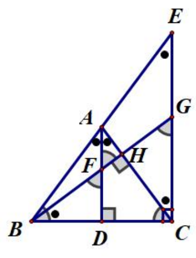

图 10

2.2　解法探究

2.2.1　系数留原处，直接倍分量代换

思路：将 4 留在等式右边，与 DF 或 DA 结合，用一条有四倍关系的线段进行等量代换. 结合联想图，显然没有哪条线段能替换成 $4DF$ 或 $4DA$.

2.2.2　系数留原处，拆开倍分量代换

思路：将 4 留在等式右边，拆成 2×2，分别与 DF 和 DA 结合，用两条有两倍关系的线段进行等量代换. 结合条件的分析，易得有 $2DF=CG$，$2DA=CE$. 此时要证 $BC^2=4DF\cdot DA$，转化为证 $BC^2=CG\cdot CE$，也就是证 $\frac{BC}{CG}=\frac{CE}{BC}$，观察图 2，不难得到△$CBE$∽△$CGB$，问题得以解决.

解法 1：由等腰三角形三线合一知 $AD\perp BC$，AD 平分∠BAC，故 $AD//CE$，进而可得∠E=∠BAD=∠CAD. 由于∠CAD 和∠CBH 均与∠ACD 互余，故可推得∠CBH=∠CAD=∠E，证得△CBE∽△CGB，则 $\frac{BC}{CG}=\frac{CE}{BC}$，$BC^2=CG\cdot CE$. 根据平行线性质，易得 $2DF=CG$，$2DA=CE$，等量代换后问题即得解决.

2.2.3　系数换一边，直接倍分量代换

思路：两边同除以 4，将系数放到等式左边，即证 $\frac{1}{4}BC^2=DF\cdot DA$. 同 2.2.1，考虑将 $\frac{1}{4}$ 与一条 BC 结合，用一条有四分之一关系的线段进行等量代换，显然行不通.

2.2.4　系数换一边，拆开倍分量代换

思路：在 2.2.3 得到 $\frac{1}{4}BC^2=DF\cdot DA$ 基础上，考虑将 $\frac{1}{4}$ 拆成 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，分别与两条 BC 结合，用两条有二分之一关系的线段进行等量代换. 根据前面的分析，我们发现 $\frac{1}{2}BC=BD=CD$，所以又有三种等量代换的方法.

解法 2：由两组角对应相等可证△DBF∽△DAB，故 $\frac{DB}{DA}=\frac{DF}{DB}$，即 $BD^2=DF\cdot DA$. 由等腰三角形三线合一知 $BD=\frac{1}{2}BC$，等量代换后适当变形，问题得以解决.

解法 3：联结 CF，同解法 2，可证两组角等，从而得△DCF∽△DAC，故 $\frac{DC}{DA}=\frac{DF}{DC}$，即 $DC^2=DF\cdot DA$. 由等腰三角形三线合一知 $DC=\frac{1}{2}BC$，等量代换后适当变形，问题得以解决.

解法 4：由两组角对应相等可证△DBF∽△DAC，得 $\frac{DB}{DA}=\frac{DF}{DC}$，后续步骤同 2，由等腰三角形三线合一知 $DC=BD=\frac{1}{2}BC$，等量代换后适当变形即可. 本解法之下联结 CF 后证

$\triangle DCF \backsim \triangle DAB$ 也可以完成证明.

2.3　解法归纳

上例中非 1 系数的等积式证明问题，基本思想是“化归”：通过对条件和结论的分析和联想，对非 1 系数进行处理，利用线段倍分关系进行等量代换，转化为常规的等积式证明问题. 其中良好的几何解题习惯是基本功，熟悉基本几何模型和充分完全的联想能力是关键，转化能力是核心，能帮助我们厘清条件，在充分“发散联想”之后精准“收敛聚焦”问题，从而快速找到问题的解决方法.

2.4　问题呈现 2

如图 11，已知 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 平分 $\angle ACB$，射线 CD 交 AB 于点 D，点 E 是 CD 上一点，且 $\angle AEC=\angle ABC$，联结 BE. 求证：$AB^2=2ED\cdot EC$.

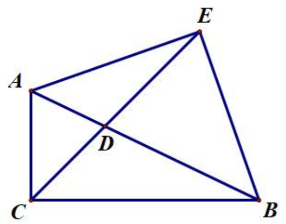

图 11

审题时仍然关注关键条件与待证结论，关注图形特征：直角三角形、角平分线、“翻折型相似”三角形，结合以往解题经验、方法策略展开充分的联想，从而获得新的图形特征. 对于结论中 2 的处理是本题的关键. 审题时的联想过程如思维导图 12，图中标注如图 13.

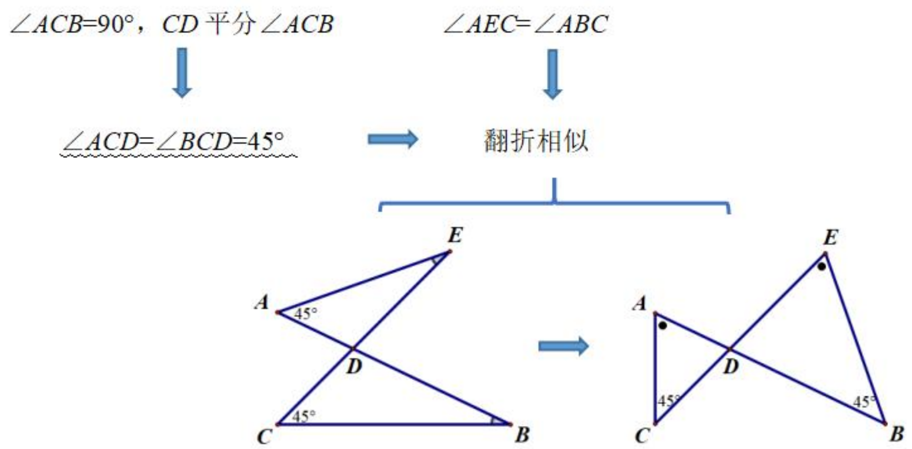

图 12

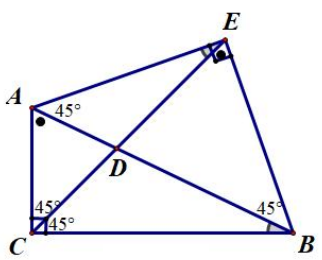

图 13

2.5 解法探究

2.5.1 系数直接倍分量代换

思路：同上一问题，我们先考虑将系数 2 留在等式右边，或除到等式左边，直接与某条线段组合，用倍分线段代换，发现图中没有得到有 2 倍关系的线段，故在不添加辅助线的前提下，上述思路无法解决问题.

2.5.2 系数开方后倍分量代换

思路：根据“翻折型相似”模型，我们不难得到重要结论：$\triangle AEB$ 为等腰直角三角形.由等腰直角三角形，我们可以得到蕴含其中的斜边与直角边之间 $\sqrt{2}$ 倍的关系，而这个，就是该问题的突破点，也是难点. 要证 $AB^2 = 2ED \cdot EC$ ，即证 $\dfrac{AB^2}{2} = ED \cdot EC$ ，也就是证 $\left(\dfrac{AB}{\sqrt{2}}\right)^2 = ED \cdot EC$，等腰直角三角形中有 $\dfrac{AB}{\sqrt{2}} = AE = EB$. 不同形式的等量代换后，可产生两种解法，共同点是都转化为一般的等积式证明. 后续证明过程留给读者自行完成.

2.6 解法归纳

上例在处理系数时，方法本质与 2.1 中的问题相同，仍然是合理摆放系数的位置，并找有倍分关系的线段进行等量代换，转化为基本等积式证明问题. 本例的“亮点”和“难点”在于，线段的倍分关系隐含在基于条件充分联想之后得到的新图形——等腰直角三角形——中.

从新图形出发继续联想得到直角边与斜边的数量关系，或基于待证结论中的平方形式，结合图形逆向联想图中是否存在 $\sqrt{2}$ 倍的线段数量关系，这个难点一旦被突破，本问题也将迎刃而解.

2.7 变式思考

如果等积式证明中出现了系数 3，我们的基本方法和基本思想是什么？又该从哪些方面展开联想？有兴趣的读者可以作一个思考.

3 非 1 系数等积式证明策略总结

通过以上分析，我们总结非 1 系数等积式的一般证明策略如图 14 所示，希望能给到读书以启发.

其中，证明的核心思想是“化归”，通过对系数的观察、联想、分析、尝试、选择，根据图中的数量关系和新图形特征，最终转化为基本等积式证明问题. 其中，学生对常见图形性质、常见几何模型、解题经验的熟练程度，将极大影响学生的解题速度，而良好的几何解

题习惯是基本功，熟悉常见几何模型和充分完全的联想能力是关键.

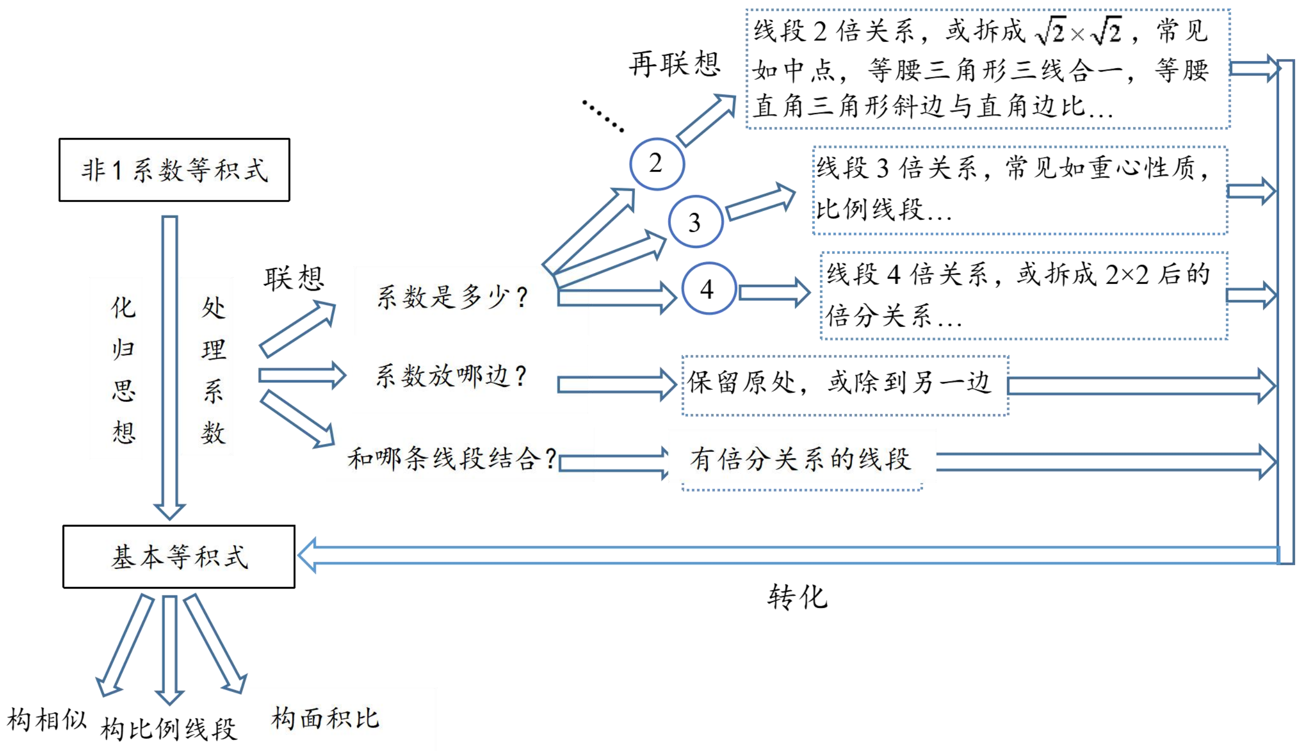

图 14