

我国小学生数学运算能力研究综述

徐汇区逸夫小学 蒋娟

运算能力作为一种重要的能力，从 1986 年教育部颁布的《全日制小学数学教学大纲》中将培养运算能力作为小学数学教学的重要任务，到《义务教育数学课程标准（2011 版）》将运算能力列为数学课程的十大核心概念之一，再到最新的《普通高中数学课程标准（2017 版）》（以下简称《课标》）中明确指出数学运算是数学学科核心素养之一，始终被认为是数学学科本质的充分体现，在数学学习和生活中均有非常重要的地位。本文对我国自上世纪末以来众多学者和一线教师关于小学生数学运算能力的成果进行综述，以期今后的相关研究提供借鉴意义。

一、研究成果的数量分析

笔者采用文献法，在中国知网中以“数学运算能力”、“小学数学运算能力”、“小学生数学运算能力”为主题词进行检索，并且以 2018 年 1 月来区分新版《课标》颁布以来的国内的文献数量，结果如下：

主题词	总篇数	2018 年 1 月以后篇目	所占比例
数学运算能力	4154	2291	55.15%
小学数学运算能力	853	592	69.40%
小学生数学运算能力	227	174	76.65%

由此可见，“数学运算能力”作为重要的能力一直在数学教育领域被持续研究，但在新版《课标》发布后，对这一领域的关注呈上升趋势，尤其是作为基础教育起始的小学阶段，对小学生的运算能力及其培养更加重视。

鉴于此，为了解已有的研究成果和目前的研究现状，笔者对有关小学生数学运算能力培养相关的文献进行了集中梳理，试图从理论和实践两个层面分析已有的成果，为小学数学教学提供理论基础和可借鉴的实践案例。

二、研究成果的内容分析

对已有文献进行整理，关于“小学生数学运算能力”的研究，其内容主要集中在关于运算能力内涵、评价指标与工具、现状及影响因素、教学实践三个方面。

（一）小学生数学运算能力的内涵研究

关于“运算能力”的定义及其内涵解读，主要为分几个阶段：

第一阶段，早期大致在上世纪 90 年代直至本世纪初，针对中小学生的运算能力的培养研究，大都将运算能力定位于单纯的“数字运算”，强调对基于基本公式、运算法则的运算习惯、审题习惯等非智力因素的训练，强调运算的准确性。张奠宙教授、李士锜教授在中国西部重庆市、浙江省及江苏省的部分地区对中小学生计算能力进行调查，提出双基教学是我国数学教育的优良传统，在新形势下，它需要不断地与时俱进，放弃不必要的繁琐记忆负担，增加新兴的数学知识和技能知识，形成科学的符合学生市级的数学“新双基”是我们的一项历史性任务。^①

第二阶段，到了 2011 年版的《课标》中对运算能力的内涵发生了重要的变化，将其定义为：运算能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力。培养运算能力有助于学生理解运算的算理，寻求合理简洁的运算途径解决问题。^②在这一阶段强化了对知识本质属性的探究，不再将运算能力局限于数的计算，而是认为它是与观察能力、记忆能力、理

^① 张奠宙，李士锜，2002 年数学教育高级研讨班纪要[J]，数学教学，2003（5）。

^② 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准（2011 年版）[S].北京：北京师范大学出版社，2011.

解能力、推理能力、表达能力及想象能力等有关的综合能力。也有学者从其他的角度对运算能力提出了阐释。端木钰（2012）提出，运算能力是指个体凭借内部语言在头脑中进行的智力活动方式。史亚娟（2008）等认为，运算能力是使用数字和符号进行运算，选择合适算法，合理估计运算结果的能力。

在这一时期，大量学者还对运算能力的结构要素等进行了探讨与分析，杨豫晖在其《义务教育课程标准（2011年版）案例式解读小学数学》一书中提出：运算能力从运算内容看，包含数的运算能力和符号运算能力；从运算过程看，运算能力包括分析运算条件、探究运算方向、选择运算公式、确定运算程序等一系列过程中的思维能力，也包括在实施运算过程中遇到障碍而调整运算的能力。^①

第三阶段，《普通高中数学课程标准（2017年版）》中提出的六个数学核心素养之一的“数学运算”，将其界定为“数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养，主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等”。这一界定既说明了内涵是什么，又比较全面地对外延做了阐述。即数学运算不仅仅关注运算的结果，还包括对问题的理解和分析、解决问题的过程与方法。王永春在对比了2011年的《义务课标》与2017版《高中课标》后，认为“从对运算阐述的变化来看，把运算从传统的强调纯数学计算正确的技能，向解决问题、理解问题、掌握法则、探究思路、选择算法等数学核心素养的高度转变，强调了数学核心素养目标的重要性和观察落实。”他认为“这个变化既是理念的转变，又是能力的转变，当然解决问题的能力包括正确计算的能力，包括理解算理等方面，即体现了数学知识观的转变。”他从数学认知、数学思想、个人发展三个维度分析了小学数学核心素养，并提出“小学数学核心素养体系下的运算能力可以理解为：数学运算是指在理解算理和运算对象的基础上，依据运算法则和运算律进行正确计算并解决问题的素养，主要包括：理解算理和运算对象，掌握运算法则，分析数量关系，选择运算方法，求的运算结果等。”^②

（二）小学生数学运算能力评价体系及工具开发研究

林崇德将运算能力发展程度分为三个等级：对数的运算概念基本理解程度、运算技能的应用与操作、解决实际问题能力程度以及元认知的发展程度。^③

潘小福提出分级设计评价内容，教师首先要了解运算的水平能力，即理解运算的法则、概念、公式、运算律等基本概念，其次要客观掌握应用运算的水平能力，最后根据标准系统综合评价运算的水平能力。运算的水平能力是指学生通过大量练习形成机械性技能，能快速寻找到直接的方法解决一些常规数的运算问题。综合评价运算的水平能力是指学生能综合运用多种运算方法，做到一题多解、举一反三，且可以准确地使用最合理、最简便的运算方法，形成高级阶段水平的运算能力。分三级水平设计评价测试内容，既可以分运算类型对学生的运算能力进行评测，也可以综合各种运算类型对学生的运算能力进行评测。^④并将小学生数学计算进行了分类如下：

小学数学计算分类	
计算内容	整数、小数四则运算、混合运算，分数四则运算、混合运算，运算律应用
计算形式	口算、笔算、估算
培养目标	培养树干，发展数学思维，形成数学思想

^① 杨豫晖，义务教育课程标准（2011年版）案例式解读小学数学[M]，教育科学出版社，2012:61.

^② 王永春：小学数学核心素养体系下的运算能力[J]，小学教学研究，2017（3）.

^③ 林崇德，中学数学教学心理学[M]，北京：北京教育出版社，2000：59-80.

^④ 潘小福，学科关键能力的厘定、评价及培养——以小学数学为例[J]，上海教育科研，2015（11）.

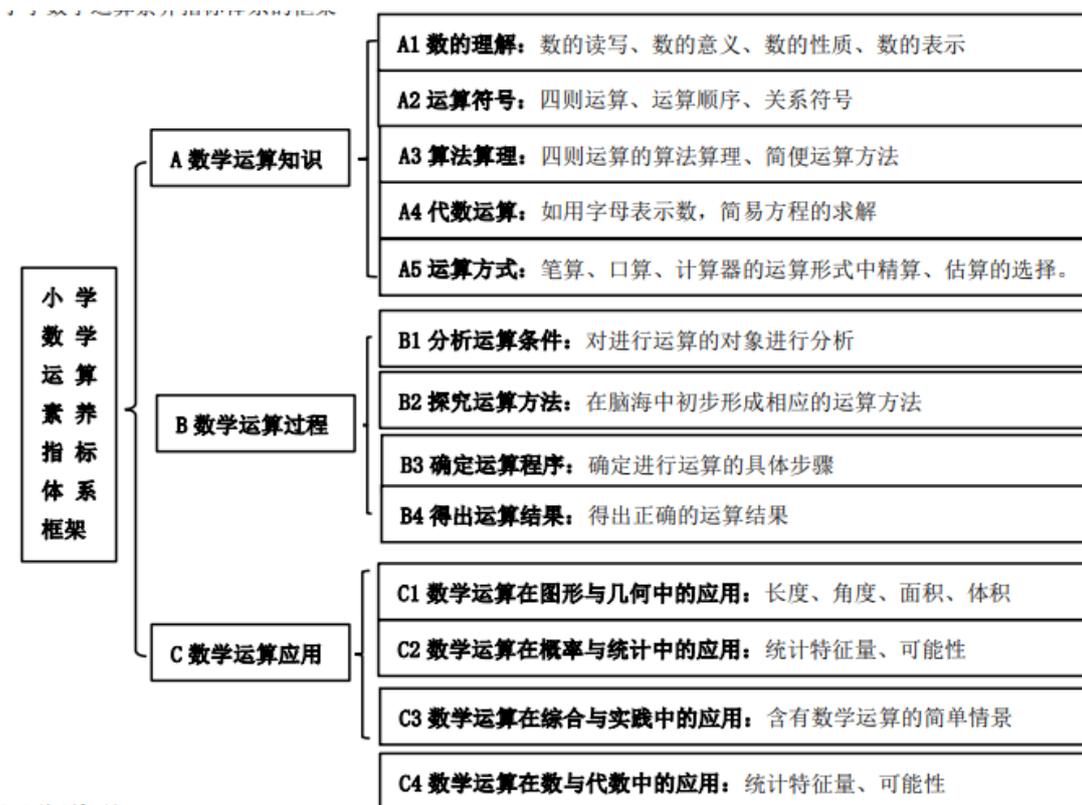
同时期，吴宏，阿布拉江·阿布都瓦克等^①提出的运算能力构成要素及其表现形式，如表：

运算能力构成要素	
构成要素	表现形式
合理运算	(1) 理解运算基本知识和基本步骤，使每步运算依据充分。 (2) 知道运算的意义和作用，运用数和运算的性质进行运算。 (3) 能模仿规范，正确运用共识和法则进行计算。 (4) 能判断结果是否合理，具备运算反思能力和检验能力以及检验意识。 (5) 对预想的结果进行估算的能力，利用估算检验运算结果的合理性。
准确运算	(1) 明确运算方法可行性，对可能出现的运算结果做出准确的判断。 (2) 准确设计、选择、构造和对算法算理的运用。 (3) 及时有效地调整运算，运用所学方法来检查运算结果的正确性。 (4) 准确理解，表述用文字和符号或字母标示数之间的相等关系。
高效运算	(1) 分析运算条件时，具备感知力和信息的挖掘能力。 (2) 探究运算方向，对关键词语和实际问题进行分析，进行适当运算和解决问题的能力。 (3) 选择运算公式，确定运算程序，要具备联系和理解以及运算方法选择能力。 (4) 调整运算的过程，发现运算过程中出现的错误并及时纠正。 (5) 运算过程中自我判断能力。
灵活运算	(1) 练习运算经验，比较分析运算结果，灵活运用数学概念，技巧，紧扣目标展开思索。 (2) 利用已有知识、技巧和经验，对不同题型或题目的不同要求，选取适当的解题策略，能用多种方法解决同一运算问题。 (3) 对数和算式的等值变形、公式的等价变形，选择公式，灵活运用。 (4) 能将公式中的变量与方程中的未知量灵活代换。 (5) 从一种运算转向它的逆运算。
简约运算	(1) 把握计算技巧、运算策略，控制运算进程。 (2) 运算步骤简洁，能段时间内完成运算。 (3) 利用快速、准确的估算方法进行估算。 (4) 数学运算最优化方法的选择能力。
创新运算	(1) 探索、发现、概括运算方法和技巧的思考方式独特。 (2) 理解和解释运算方法和规律的方式独特。 (3) 用独特、新颖的方法进行运算。 (4) 运算效果上，对数学运算最优化方法有独到之处的选择能力。

随后，针对以往分级评价过于粗浅无法直接用于日常教学中进行系统评价的缺点，徐厚燕初步探索和尝试建立了一个数学运算能力指标体系，并制定出对应的小学生数学运算素养测评量表，将其运用到学生数的运算教育教学中。其评价指标包含了数的运算知识、数的运算过程、数的运算应用。其指标体系框架如下^②：

^① 吴宏等:小学数学运算能力表现:结构要素、水平层次与评价指标[J].喀什师范学院学报.2014 (3)

^② 徐厚燕, 小学数学运算素养指标体系构建研究[D].重庆:西南大学, 2018:62.



在此评价系统中，徐厚燕首次全面提出了具有相关性的影响指标，阐述了运算中各个过程都是最终正确结果的基石，重视学生的数学思考和数学实践是得到正确结果获得有效评价的来源，而结果不是唯一的评价标准，知识的本身、经验的本身才是最重要的。在有些情况下，即使学生运算过程对而结果错，教师也应给予充分肯定，帮助学生理清思路逻辑。这往往比教授学生所谓的巧算技巧、简便方法更有长久发展意义。

（三）小学生数学运算能力的现状调查研究

与学者、数学教育专家的理论探讨不同，大部分一线教师对小学生数学运算能力的研究都聚焦在教学实践领域，其中关于运算能力的水平测试、现状分析与诊断以及影响因素占了较大的比例。这一类的研究大都是教师对某个年段的学生，采用定量的方式来进行测试，对测试的结果进行分析，样本主要分为同一区域同一学校的小学低年段或高年段和同一年段不同地区或不同学校。

张莹莹使用吴汉荣教授的《中国小学生数学基本能力测试量表》，对南京市和杭州市的两所小学的第二学段的四、五、六三个年段的 431 名学生进行测试发现^①：在小学生数的运算能力各项维度中，被测学生对除法知识的掌握相对较好，而比较大小的能力有待于提高。整体上学生完成乘法和除法的得分要高于加法和减法，与学生加减法学习要早于乘除法来看，他认为各维度的运算能力强弱与学习的早晚之间没有明显的关系。各个维度的相关性方面，六个方面两两都呈现显著的正相关，数学运算能力与各维度是密切相关的。而在差异性方面，在不同维度的得分上略有区别，但是数学运算能力及各维度的表现不存在显著的性别差异；学生数学运算能力存在显著的年级差异；在是否喜欢数学上存在显著差异，喜欢数学的学生，其数学运算能力要明显优于不喜欢数学的学生；学生数学运算能力及各维度在有无课外辅导上存在显著差异，参加课外辅导的学生，其数学运算能力要明显优于不参加课外辅导的学生；学生的加法、乘法和比较大小的有无父母布置作业上存在显著差异，其他维度

^① 张莹莹，小学第二学段学生数学运算能力的现状调查[D]，南京师范大学硕士学位论文，2017.

上不存在显著差异。

（四）小学生数学运算能力培养的教学实践研究

在研究成果中,还有较大比例的一类是一线教师对如何培养小学生数学运算素养的教学策略探讨与经验案例。主要分为两类:一类是结合调查或观察的分析,对小学生数学运算能力的问题进行描述与剖析,进而有针对性地提出改进措施并在教学实践中运用验证。一类是教师根据运算教学特点做的实践尝试提炼的有效策略。

有些学者从小学生认知发展阶段的角度,对如何提高小学生运算能力提出教学建议。杨熠等人提出利用数轴帮助学生理解加减混合运算的运算顺序和运算律,将刻板的、形式的、逻辑的知识转化为直观形象的知识,将数轴和运算教学结合起来,这符合儿童的认知发展规律,使数的运算变得更易于理解。^①运算能力的提高要求学生的逻辑思维及解决实际问题的能力有所提高。根据运算能力的形成过程,蒋敏杰认为小学生运算能力的培养内容不仅要包含对知识与技能的训练,而且应该设计思维能力的强化。^②周栩提出,要培养学生运算中良好的书写习惯,减少誊抄过程中数字和运算符号书写错误而影响运算结果的问题,提高学生数的运算能力;培养学生养成认真检查运算、书写结果和验算书写过程的习惯。^③

王先霖在对学校中段小学生数学运算能力发展的现状和问题调查的基础上,从教师视角和学生视角对成因进行了分析,用准实验法在教学中采取了以下措施进行提升小学生运算能力的实践^④: 1、注重学生在现实生活中抽象出运算问题的过程经历。2、增强学生的数感和符号感。3、重视基本运算概念和原理的教学。4、重视四则运算教学,重视口算加强估算,提倡算法的多样化以及重视学生在运算过程的体验与感知。通过实验数据的对照,发现被试学生在前后两次间隔测试下,运算能力有了显著性变化,进而验证了以上教学措施的有效性。

三、对已有成果的分析与述评

现有的文献中对我国小学生数学运算能力的内涵、小学生数学运算能力评价指标建立及工具开发、小学生数学运算能力发展的现状、提升小学生数学运算能力的教学策略等方面都有不同程度的研究,形成了大量的理论与实践的成果,充分体现出了运算能力在小学生数学教学中的重要地位。纵观已有的研究成果,不管是数量上,还是质量上,理论建构亦或是实践探索层面,都取得了较大的进展。但随着学科核心素养培育的实践需求,义务教育阶段即将出台的新的课标的要求,作为数学基础性能力的运算能力,都值得更加深入的探讨。

首先,对小学生数学运算能力的结构及其要素尚未建立起统一且普遍认可的认识。已有的研究大都是引用了2017年版的《普通高中数学课程标准》中关于数学运算这一要素的概念界定,并作出了进一步的解读。从群体上来看主要是两种方式:一种是从事学术研究的高校教师及研究生,侧重从小学生认知发展规律的角度,对数学运算能力进行表现行为的解读。另一种是一线数学教师,更多是从数学学科知识的角度,根据小学生运算学习的内容及学习要求,对小学生运算能力进行阐释。两大群体自身内部都还没有能够在对结构及要素的内容及呈现方式上有较为一致的说法,更谈不上两者之间的融合,进而提出兼具理论及学科教学实践的广为认可的要素表达了。

其次,关于小学数学运算能力的评价方式与手段,缺少经过科学验证能广泛运用的工具。对运算能力的诊断与评价,国外倾向于通过表现性评价的方式进行,例如新西兰采用的

^① 杨熠,金小亚:巧用数轴培养学生运算能力[J].教学与管理.2020(11).

^② 蒋敏杰:小学数学计算教学算理的结构分析及教学策略[J].中小学教师培训.2016(7).

^③ 周栩:小学六年级学生数学运算能力研究[D].海南师范大学.2019.

^④ 王先霖, A 校中段小学生数学运算能力发展的问题与改进策略研究[D],西南大学专业学位硕士学位论文,2021.

是诊断性访谈来评价,美国和澳大利亚数学运算能力表现评价指标与运算过程(不是知识点)紧密联系,结合运算过程的各环节对于运算能力要求的水平,描述运算能力各结构要素下相应的能力表现,按照不同水平学习结果,以具体的可见的行动描述作为水平要求的具体指标,指标描述呈现具体、清晰、通俗易懂的特点,将抽象的内隐的能力要求转化为外显的可操作的测评指标。我国已有的研究基本仍然采用的是传统的纸笔测验为主,而且测验的内容也大多都是以直接的计算题目为主要形式。即便抛开纸笔测验是否能够检验出学生真实运算能力这一问题本身,试卷本身的科学性,除了本世纪初华中科技大学武汉荣教授在引进《德国海德堡大学小学生数学基本能力测试量表》的基础上修订的《中国小学生数学基本能力测试量表》是被证明具有较好的信度和效度,符合测量学的要求外,其他所有的测试试卷或问卷,都是研究者自身编制缺乏广泛的实践检验与认可。

再次,提升小学生数学运算能力的教学实践方面,多为分散的操作经验,尚未建立其有理论支撑的体系化的培养策略。目前关于培养小学生数学运算素养的教学建议,大都是一线教师在教学实践中针对某一节课或者某一知识点的教学案例,最多是案例的集合。这类成果往往是带有很强的教师及所教学生的个体性特点,而且大都用的是教学过程的操作表达,在科学性上无法验证,因此很难有较强的推广性和可复制性。还有一些是针对测试中学生答案表现出来的问题进行分析提出的建议,这类虽然能够在理论上有所解释,但是教学建议因为没有经过实践,其操作性又存在疑问。

综上所述,如何将小学生运算能力的理论与教学实践相结合,提出科学的评价指标体系,通过合理、多途径的诊断与测量方式,便于教师有效地了解与分析学生运算能力水平及发展情况,进而在实践中有针对性地调整和改进自身教学,促进学生数学运算素养的提升,仍然需要广大的学者和一线教师在理论与实践层面,开展更深入、更广泛的合作与研究。