高阶思维培育视角下初中数学复习课本原性问题的设计

上海市世外中学 傅炤

（本文系徐晓燕市级课题《高阶思维培育视角下初中数学“本原性问题设计”》成果之一）

摘要 复习课是初中阶段发展学生高阶思维很好的载体。基于本原性问题的初中数学复习课教学设计，包括目标、内容、方式的转变和创新，从整体上规划学生核心素养的发展。

关键词 复习课 高阶思维 本原性问题

（一）问题的缘起

复习课，顾名思义是再次学习，是把已经学过的知识重新加以梳理反思，使之结构化的教学活动。通过对所学过的基础知识和基本方法的系统复习，帮助学生形成知识网络，建立方法体系，培育学科一般观念，以促进知识的深度理解，提升知识应用的能力，实现更高层次上的知识内化，从意义建构向能力生成跨越。

数学复习课的核心目标是通过对单元知识学习过程的梳理，建构知识体系；通过对数学思想方法归纳与概括，学会数学思考问题的方式方法，形成方法体系；通过对发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的策略归纳，积累问题解决经验，并用以解决真实问题。因此复习课是发展学生高阶思维很好的载体。

当前数学复习课的突出问题是采用“知识点回顾+典型例题操练”的“以练代学”的教学方式。一方面，对知识点的回顾往往设计为事实性问题，比如“一元一次方程的定义是什么？”，导致学生对数学知识的理解停留在记忆背诵阶段，缺乏深层次理解，更谈不上知识体系与数学思想方法体系的建构；同时，大量的题型操练，增加了学生学习负担，学生对数学问题的解决能力停留在模仿应用阶段，缺乏对问题解决过程中一般策略的归纳与总结，导致学生高阶思维能力得不到发展。如何从问题驱动的理念上引领教学设计指向学生的高阶思维培养，成为目前初中数学复习课亟待解决的问题。

（二）概念界定

2.1 高阶思维的内涵

《高阶思维能力培养视角下的“本原性问题设计”》课题组认为，从数学教育的视角，“高阶思维”是学生在数学学习活动中为完成“学习任务和要求”中所表现出来的以高层次认知水平为主的综合性能力。具有任务复杂、真实、需要付诸心智努力、自我调控与反思、建构和阐释、多元的标准和需要判断的特点。外在表现为策略型思维、批判型思维、创新型思维，具有严谨性、深刻性、问题性、批判性、独创性、灵活性。

2.2 本原性问题的内涵

《高阶思维能力培养视角下的“本原性问题设计”》课题组认为，本原性问题是凸显学科本质、关注认知规律的问题，处于学生认知基础与学科观念的联结点上的问题，具有启发性、本原性、统领性，它能激发思考与探究、促进知识联系与迁移、导向深度学习与理解。

2.3 高阶思维视角下复习课本原性问题设计的价值与意义

本课题组构建了本原性问题统领的“问题提出”的教学模型（见图 1）。“本原性问题”是课堂组织的中心，具有统帅作用。以体现单元或模块内容本质和学科观念的“本原性问题”为中心的，在课堂教学中，“根据目标预设的驱动性情境和问题”“学生问题解决中产生的问题”“教师的引导性问题”，以及“解决问题的学习环境”成了高阶思维视角下本原性问题驱动学习的基本要素。

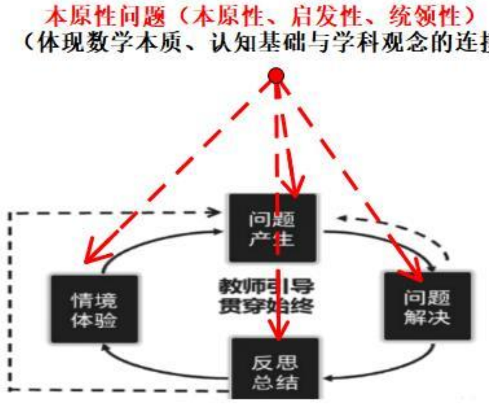
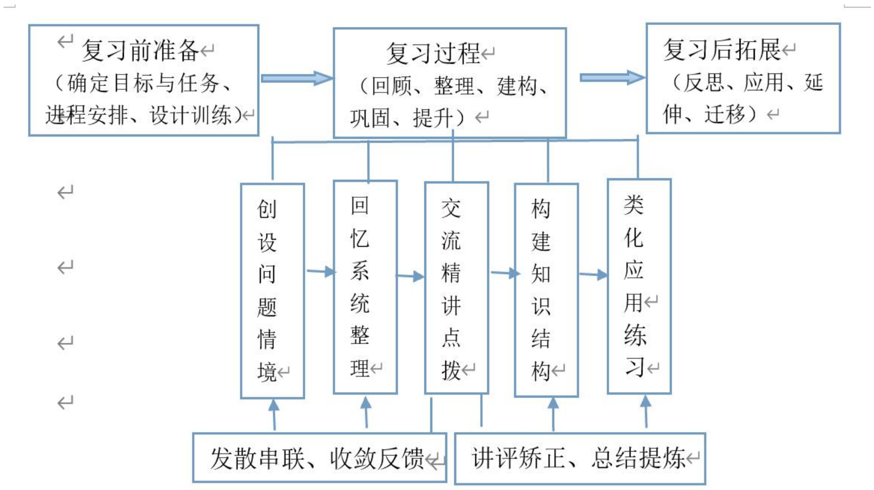


图 1 基于本原性问题的教学模型

复习课教学如果能以根据学科思维和“本原性问题”为核心，教师进行设计问题与情境，引发学生的问题，围绕学生的困惑和问题设计引导性问题，围绕教学目标设计推进性问题和延展性问题，系列问题环环相扣，把学生的学习引向高阶学习和思维，那么就能有效地激发学生理解和体验到到学习内容的本质，真正提升学生的数学素养。

在以知识体系归纳整理为主要教学目标的复习课中，教师需尊重学生学习主体者的地位，发挥教师主导者的作用，用本原性问题架构一个单元或几个单元的知识网络，充分调动学生的积极性，让学生在问题解决过程中抽象概括、完善优化知识体系与方法体系，发展学生的策略型思维；而对于以问题解决为核心教学目标的复习课中，通过本原性问题驱动问题解决过程，帮助学生在原有认知结构的基础上反思质疑、辩证思考、整合重构，不断突破自我认知冲突，寻找问题解决的方法，发展批判性思维；并通过拓展延伸、发散关联，发展学生的创造型思维，提升学生深度学习水平。在此基础上我们提炼了复习课“三阶段五环节”的教学模式（见图 2）。



“三阶段五环节”复习教学范式

图 2

（三）本原性问题的设计策略

1.更加清晰的目标：确定指向数学思想方法与高阶思维的本原性目标

在复习前首先要明确有关知识的本原性目标。具体来说本章、本单元及本节课所涉及的核心概念是什么？这些概念是如何联系在一起的？背后蕴含的数学思想方法和一般观念又有哪些？蕴含的核心素养成分又有哪些？教师必须立足于本单元，站在课程的视角下梳理本单元和其他单元之间的关系，本单元内各概念之间的联系.在深度分析数学内容的本质与学科观念后，根据教学目标、课程内容设置以“本原性问题”为统领的基本问题链，架构认知过程和高阶思维路径，从而将内容转化为问题，以问题引领学生构建整体的知识结构。对相关知识的本原性问题教学目标的分析，我们常常通过以下三个环节：(1）学习课程教学标准，理解相关知识的教学目标；(2）通过讨论，去明确知识的本原性目标；(3）经过教学实践及效果分析去调整知识的本原性目标。以一次函数单元复习课为例，立足素养导向建立目标体系与问题系统的关联，构建课程目标、单元目标、课时目标的转化过程，从而确定复习课的学习路径。

【一次函数单元学习规划】

单元教学目标	本原性问题
1.理解一次函数的概念，会判断两个变量之间的关系是否为一次函数 2.会画一次函数的图像，并借助图像的直观，理解一次函数的性质 3.了解两条平行直线的表达式之间的关系，能以运动的观点来认识这种关系	①为什么要研究一次函数？ ②如何研究一次函数？ ③一次函数与一元一次方程、一元一次不等式有怎样的联系？ ④如何利用一次函数解决实

<table>
<tr><td colspan="2">4.能借助一次函数的图像认识一元一次方程的解、一元一次不等式的解集，理解一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的内在联系
5.能应用一次函数知识解决一些简单的有关的实际问题；获得将实际问题转化为数学问题的体验，了解建立简单函数模型的意义
6.在解决问题的过程中，增强一次函数的应用意识，体验数形结合的数学思想，提高由图像获取信息进而解决问题的能力</td><td>际问题？
⑤一次函数学习过程中是如何体现数形结合思想的？</td></tr>
<tr><td colspan="2">课时教学目标</td><td>本原性问题</td></tr>
<tr><td>课时1</td><td>1.通过问题驱动，梳理一次函数的知识，形成一次函数知识网络，归纳研究函数一般方法
2.从函数观点揭示二元一次方程组的解的几何意义，将含参二元一次方程组解的问题转化为一次函数图像交点问题
3.感受数学知识间的内在联系、加深对数形结合数学思想的领悟</td><td>①如何研究一次函数？
②一次函数与一元一次方程、一元一次不等式有怎样的联系？
③一次函数学习过程中是如何体现数形结合思想的？</td></tr>
<tr><td>课时2</td><td>能应用一次函数知识解决一些简单的有关的实际问题；获得将实际问题转化为数学问题的体验，了解建立简单函数模型的意义</td><td>如何利用一次函数解决实际问题？</td></tr>
</table>

2.更有价值的内容：自主建构知识网络，聚焦数学观念，设计开放性问题

复习课的核心任务之一是建构知识网络与方法体系.基于知识与方法体系建构的复习课，就是要以一般观念引领，围绕着本原性问题设计开放性情境，将学习任务习题化、问题化，引导学生把已学过的知识进行自主整理、自主分类、自主整合；在交流精讲过程中，将数学的思想方法、数学知识的研究方法等设计为“如何”式的问题，帮助学生弄清知识的来龙去脉，沟通知识间的纵横联系，突出知识背后的数学思想方法，实现新旧知识之间的整合，完善知识网络，使知识结构转化为认知结构，培养学生分析归纳能力和知识迁移能力。

【教学片段一：以开放式问题系统促一般观念的形成】

问题1：由函数解析式 $y=-2x+4$，能获得哪些信息？

生1：这是一个一次函数.

师追问①：如何判断这是一次函数？

生1：这个函数符合一次函数的定义，其解析式形如 $y=kx+b(k\neq 0)$.

生2：这个函数的图像是一条直线，经过第一二四象，且 y 随着 x 的增大而减小.

师追问②：你是怎么判断它经过的象限及增减性的？

生2：由 $k<0,b>0$ 得到的.

生 3：也可以根据平移，由正比例函数 $y=-2x$ 向上平移 4 个单位得到该函数的图像，因此可得它的位置和增减性.

问题 2：这些信息怎样去进行有序的梳理呢？

生 4：可以根据一次函数的研究方法，即定义—图像—性质三个角度来梳理.

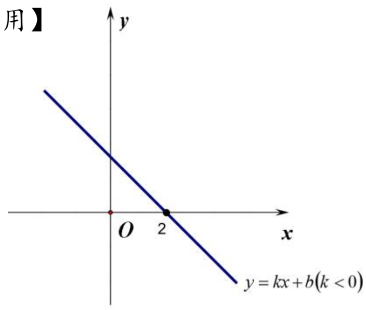
生 5：从数和形两个角度，也就是一次函数的解析式特征和图像特征来梳理.

问题 1 是一个开放性问题，并通过引导性问题从函数解析式出发引导学生进行发散性思考，由函数的代数结构，确定函数的类型，根据函数的类型，由解析式中参数的特征，确定函数图像的特征，进而得到函数的性质。从定义到图像到性质，是函数研究的一般顺序，也体现了函数知识结构的建构过程，培养学生的策略型思维。问题 2 是引导从无序的发散走向有序的梳理提炼，感受函数研究过程中的一般方法，体会数形结合的思想，从而为后续利用函数解决新问题作铺垫，培养学生的创新型思维。

3. 更加灵活多样的方式：注重知识的迁移应用，聚焦问题解决的路径，设计归纳式问题

复习课的核心任务之二是对知识和方法迁移应用。在知识结构建立之后，就需要将数学思想内化为学生自身思考问题的指南和解决问题的方法。因此，基于知识迁移应用的复习课最大特点是聚焦单元内容领域中的问题解决与问题提出能力，其重点在于：明确一种思想方法有什么用和如何用，能够通过具体问题的解决归纳概括相应的解决问题的一般步骤，并在此基础上迁移到新的问题情境中。

【教学片段二：以归纳式问题系统概括问题解决路径，促进知识的迁移应用】



问题 1：根据图像信息，能解决哪些问题？

生 1：根据直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与 x 轴的交点坐标（2，0）

可以求得方程 $kx+b=0$ 的解为 $x=2$.

师引追问①：可以通过图像与 x 轴的交点坐标求一元一次方程的解，

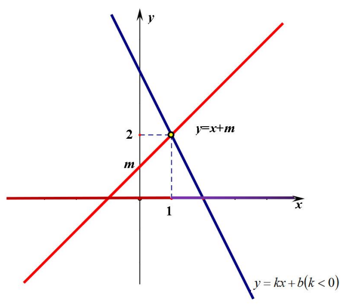
还可以解决其他问题吗？

生 1：求关于 x 的不等式 $kx+b>0$ 或 $kx+b<0$ 的解集

师追问②：怎么根据图像解决以上问题的？

生 1：一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 在 x 轴上方（或下方）部分对应的横坐标的取值范围，就是关于 x 的不等式 $kx+b>0$（或 $kx+b<0$）的解集的几何意义.

问题 2：根据图像信息，能解决哪些问题？



①从两个一次函数图像的交点坐标出发

生 2：可以求关于 x 的方程 $x+m=kx+b$ 的解，

或者关于 x 的不等式 $x+m>kx+b$ 的解集.

师追问①：如何求解？

生 2：直线 $y=x+m$ 在直线 $y=kx+b$ 交点横坐标的值就是方程 $x+m=kx+b$ 的解；直线 $y=x+m$ 在直线 $y=kx+b$ 上方（或下方）部分对应的横坐标的取值就是不等式 $x+m>kx+b$ 的解集.

②一次函数图像与二元一次方程组的联系

师追问②：两条直线的交点坐标为（1，2），还可以解决什么问题吗？

生 3：可求方程组 $\begin{cases} y=x+m \\ y=kx+b \end{cases}$ 的解

师追问③：为什么？

生 3：交点坐标同时满足解析式 $y=x+m$ 和解析式 $y=kx+b$，也就是同时满足解析式对应的方程 $y=x+m$、方程 $y=kx+b$，即方程组 $\begin{cases}y=x+m\\y=kx+b\end{cases}$ 的解.

问题 3：已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}y=-2x+4\\y=x+m\end{cases}$ 的解中 $x>0$ 且 $y>0$，求 m 的取值范围.

生 4：根据六年级的学习，通过代入消元解含参二元一次方程组

师追问①：这个带参数的二元一次方程组的问题，如果从函数的角度来看，它等价于什么问题呢？

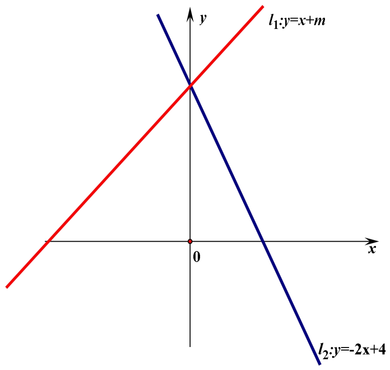
生 5：从函数视角，这个问题等价于已知直线 $y=-2x+4$ 与直线 $y=x+m$ 的交点在第一象限，求 m 的取值范围。可根据以下步骤：

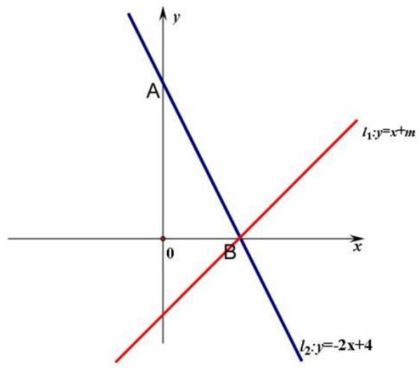
①画出图像

②借助问题 2 中直线 $y=x+m$ 的运动规律

③找到含参一次函数图像在运动过程中的临界位置，从而确定直线的运动范围即可

解：临界位置 1： $m=4$　　　　临界位置 2： $m=-2$　　$\therefore -2<m<4$





师：第一种方法就是消元法，用代数计算的方式解决问题；第二种方法是利用方程与函数的关系，采用图像法，以数形结合的思想解决带参数的二元一次方程组问题。

三个问题逐层递进，从简单到复杂地呈现了函数与方程、不等式之间的逻辑联系。在问题 1 中从一个一次函数图像 x 轴的交点坐标出发，从数与形两个维度感受了一次函数图像与一元一次方程、一元一次不等式的联系，在问题引领下归纳用函数解决方程与不等式的具体步骤。问题 2 从两个一次函数图像的交点坐标出发，感受一次函数图像与二元一次方程组的联系。

对于具有内在联系的不同的主题下的数学对象，即函数与方程、不等式，也可以找到一条“主线”，即数形结合思想，将其编制成一个整体，在函数这个“大概念”的统摄下，把方程、不等式看成式函数在某种特定状态下的特性，从而彰显数学的整体性、系统性，克服知识碎片化、方法单一化及认识表层化的问题，为后续迁移应用函数观点解决更复杂的问题 3 作铺垫。

三个情境彼此关联，以本原性问题“一次函数与一元一次方程、一元一次不等式有怎样的联系?”为核心，数学教师设计相应的问题系统，在问题解决过程中构建了从策略型思维、批判型思维到创新型思维的高阶思维进阶之路，从而达成学生对知识的深度理解，由此，基于本原性问题的初中数学复习课教学设计，包括目标、内容、方式的转变和创新，从整体上规划学生核心素养的发展。

参考文献：

① 郑燕红:《聚焦符号抽象、推理和运算的“方程与不等式”专题复习教学设计与思考》,《中国数学教育》2021 年第 4 期

② 张东:《基于发现和提出问题推进初中数学复习课教学的实践与思考》,《数学通报》2019 年，第 58 卷，第 4 期。

③ 吴增生:《基于内容领域聚焦核心素养的专题复习教学研究》,《中国数学教育》，2021 年第 4 期。

④ 吴立宝,刘颖超,曹雅楠：《基于问题链的初中数学课堂高阶思维培养路径研究》，《天津市科教院学报》 2022 第 34 卷第 1 期，第 21-26 页。