

以形助数，感悟数形结合思想

——巧用拼图实验，理解乘法公式的意义

姓名 刘艺

学科 数学

单位 上海市徐教院附中

电话 15216715764

地址 上海市徐汇区上中路 50 号

邮编 200230

电子邮箱 420249821@qq.com

以形助数，感悟数形结合思想

一巧用拼图实验，理解乘法公式的意义

徐教院附中 刘艺

一、教学内容及其解析

乘法公式是初中数学基本而重要的内容之一. 它是具有特殊形式的多项式相乘问题, 通过归纳其中的规律而得到公式, 从而完善了整式乘法知识结构. 乘法公式是多项式运算和因式分解的重要工具, 公式的灵活运用是培养运算能力的重要途径. 在整式乘法这个单元中, 一个非常重要的思想是用不同的方法表示同一个图形的面积, 根据面积相等得到等式, 进而让学生体会数形结合的思想. 在实际教学中, 教师多数情况下会先把图形给出, 借助图形直观发现整式乘法, 了解公式的几何背景, 经历“由形到数”. 这样的处理方式, 虽然学生易于发现结论, 但笔者认为这样的处理会在一定程度上缩减学生的思维容量. 所以本节课想从“数”出发, 先“由数到形”再“由形到数”, 最终实现数与形之间的互相转化, 进而感悟数形结合思想.

二、教学目标设置

①通过参与拼图, 感受探索图形实证的乐趣;

②借助利用面积对乘法公式进行说明的过程, 体会数形结合的数学思想, 发展几何直观和推理能力.

三、学情分析

在小学学生已经学习过长方形、梯形等

规则图形的面积公式, 给出图形, 可以计算出相应的面积. 本节课的面积计算中, 有些是不规则图形, 需要学生将不规则图形转化为规则图形进行计算. 在此之前的面积计算是“由形到数”的过程, 而本节课是需要学生经历“由数到形”, 再“由形到数”的过程, 从思维难度上来看会对学生造成一定的障碍.

四、教学策略分析

本节课以实验活动课的方式安排学习过程, 完成“操作与发现—操作与思考—拓展与延伸”的过程:

①在操作与发现环节, 启发引导学生发现乘法公式对应的图形语言, 实现“从数到形”的转化, 通过对图形面积的直接表示和间接表示的不同表示方法中实现“从形到数”的转化;

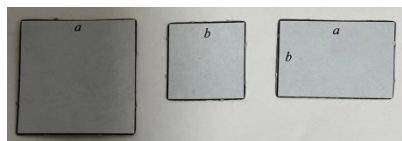
②在操作与思考环节, 通过对比观察所拼出图形的特点, 从正方形与长方形之间特殊与一般的图形关系, 体会乘法公式与整式乘法之间特殊与一般的关系, 进一步渗透数形结合思想;

③拓展与延伸环节是对上一个环节的进一步深入, 抓住数与形的关系, 通过完全平方公式来解决正方形的问题.

五、教学过程设计

教学材料准备: A 型纸片 (边长为 a 的

正方形)、B 型纸片 (边长为 b 的正方形)、C 型纸片 (长为 a 、宽为 b 的长方形) 各若干.



1. 操作与发现

问题 1 回顾我们所学习的乘法公式, 想一想完全平方公式与平方差公式的图形语言是怎样的呢? 动手试一试.

先来看 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, 引导学生观察公式的特点, 想要用图形来解释这个公式需要拼出怎样的图形? 不难发现, 需要拼出边长为 $a+b$ 的正方形. 通过操作, 可以用 1 张 A 型纸片、1 张 B 型纸片、2 张 C 型纸片拼成如图 1 的正方形. 用不同的方法表示该正方形的面积, 可以得到完全平方公式: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

问题 2 想一想 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 的图形语言呢?

由前面的引导, 学生会想到需要拼出边长为 $a-b$ 的正方形, 因为只能拼不能剪, 所以只能通过图形叠放在一起的方式, 将边长为 $a-b$ 的正方形的图形呈现出来. 通过操作, 可以将 2 张 C 型纸片, 按如图 2 的方式放置于 1 张 A 型纸片上. 用不同的方法表示图 2 中阴影部分的面积, 可以得到另一个完全平方公式: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

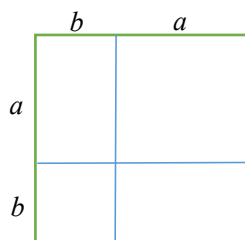


图 1

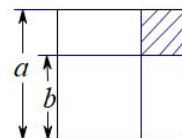


图 2

思考 1 在以上两个问题中, 你能说一说两种不同表示图形面积的方法分别是什么吗?

引导学生观察发现等式的左边是图形面积的直接表示, 等式的右边是图形面积的间接表示.

设计意图: 问题 1 和 2 的设计改变了由教师直接给出图形的方式, 而是让学生思考该用怎样的图形来呈现公式背后的几何意义, 给学生更多的思考空间. 通过思考 1, 让学生对于面积不同的表示方法可以从直接表示和间接表示两个大方向来考虑, 为接下来学习因式分解作铺垫.

问题 3 平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 的图形语言是不是也可以用类似的方法得到呢?

对于平方差公式如果从等式左边来入手, 学生会遇到困难, 这时引导学生换个角度从等式右边入手, 这个问题就会迎刃而解. 通过操作, 可以将 1 张 B 型纸片, 按如图 3 的方法放置于 1 张 A 型纸片上. 接下来会发现阴影部分是一个不规则图形, 无法用面积公式直接求出, 所以引导学生将不规则图形转化为规则图形来求解.

方法 1: 将阴影部分图形进行剪拼得到长方形, 此长方形面积为 $(a+b)(a-b)$.

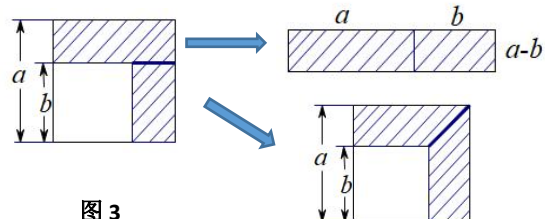


图 3

方法 2: 将阴影部分图形分割成两个一样的梯形, 每个梯形的上底是 b , 下底是 a , 高是 $a-b$, 阴影部分面积是 $2 \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{2} = (a+b)(a-b)$.

变式 1 如图 4, 将 B 型纸片放置在 A 型纸片正中间, 是否也能得到平方差公式?

变式 2 如图 5, 如果将 B 型纸片放置在 A 型纸片的任意位置 (不能超出 A 型纸片), 是否也能得到平方差公式?

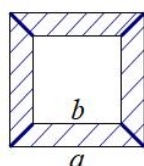


图 4

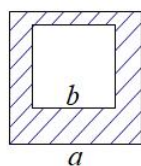


图 5

变式 1 的方法同问题 3, 思路还是将不规则图形面积转化为规则图形面积, 可以通过剪拼得到长方形, 也可以分割成四个一样的梯形进而表示面积. 变式 2 中阴影部分的四周并不是等距的所以拼出长方形的路是走不通的, 所以还是采用分割成四个梯形的方法, 可设四个梯形的高分别为 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4 , 再利用整体思想表示阴影部分面积.

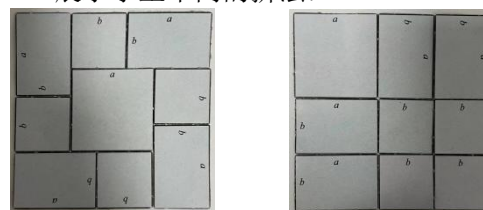
设计意图: 通过寻找平方差公式所对应的图形的过程中, 让学生体会“转换思路”的重

要性, 如果从等式左边出发有困难, 就不妨尝试换一换思路, 可能就会豁然开朗. 在平方差公式图形语言探索的过程中, 体会将不规则图形转化为规则图形的思想. 两个变式层层递进, 让学生进一步体会在图形变化的过程中的不变的方法.

2. 操作与思考

操作 1 用 A 型纸片 1 张、B 型纸片 4 张、C 型纸片 4 张, 拼成一个正方形. 用不同的方法表示拼得的正方形的面积, 你能得到怎样的等式?

展示学生不同的拼法:



通过以上操作, 可以得到等式:

$$(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$$

操作 2 用 A 型纸片 1 张、B 型纸片 3 张、C 型纸片若干张, 拼成一个长方形. 用不同的方法表示拼得的长方形的面积, 你能得到怎样的等式?

展示学生的拼法:



通过以上操作, 可以得到等式:

$$(a+b)(a+3b) = a^2 + 4ab + 3b^2$$

思考 2 以上操作能否拼出一个正方形?

引导学生对比操作 1 和操作 2, 通过观

察图形，得出只有当 A 型纸片、B 型纸片的数量为平方数时，才可能拼出正方形.

设计意图：通过两个操作的对比，让学生从图形角度让学生体会完全平方公式与整式乘法之间的关系如同正方形与长方形之间的关系一样，是特殊与一般的关系.

3. 拓展与延伸

探究 有 A 型纸片、B 型纸片、C 型纸片各 10 张. 从中取若干张纸片（每种纸片至少取 1 张），把取出的这些纸片拼成一个正方形（所拼图中既不能有缝隙，也不能有重合部分）. 你觉得可以拼出多少种不同的正方形？并说明每个正方形对应怎样的等式？

由思考 2 得到的结论，可知当 A 型纸片和 B 型纸片数量分别为平方数（即 1 或 4 或 9）时才可能拼出正方形. 使用完全平方公式将 $(ma+nb)^2$ 展开得到 $m^2a^2+2mnab+n^2b^2$ ，

其中 a^2 、 b^2 、 ab 的系数就分别对应 A 型、B 型、C 型纸片的数量. 将所有情况通过下表给出：

A 型	B 型	C 型	对应等式
1	1	2	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
1	4	4	$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$
1	9	6	$(a+3b)^2=a^2+6ab+9b^2$
4	1	4	$(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2$
4	4	8	$(2a+2b)^2=4a^2+8ab+4b^2$

4	9	12	舍去
9	1	6	$(3a+b)^2=9a^2+6ab+b^2$
9	4	12	舍去
9	9	18	舍去

设计意图：在这个探究活动中能不能拼成正方形的问题可以转化为完全平方公式的问题.从表面上看这是一个“形”问题，由于数与形之间是可以相互转化的，所以可以将“形”问题转化为“数”的问题.

4. 自主小结

- ①如何寻找乘法公式的几何意义？
- ②乘法公式的左右两边分别对应面积的哪两种表示方法？
- ③如何表示不规则图形面积？

参考文献

[1]章建跃. 数学教育随想录（下卷）[M]. 杭州：浙江教育出版社，2017.

[2]董林伟. 数学实验手册[M]. 南京：江苏凤凰科学技术出版社，2015.

[3]焦倩玉. 巧用拼图实验，感悟数形结合[J]. 教学案例.