初中数学平面几何有关中点问题添辅助线的教学策略

上海市民办华育中学 王江

【摘 要】本文对于初中平面几何问题中，有关线段中点问题填辅助线的策略进行探讨。当题目中的中点的条件与其他条件相结合时，会出现一些常见的填辅助线的策略，这些策略的归纳与总结，有助于老师们系统思考与讲解，也有助于学生对有关中点问题的解决，形成有效的活动经验，从而帮助学生建立联系，帮助解决类似问题。

【关键词】中线倍长 构造平行四边形 构造斜边上的中线 构造中位线

波利亚在《怎样解题》中涉及“辅助元素”（Auxiliary elements,指的是为了帮助求解而引入的元素）时，曾提到过“辅助线”这一概念，波利亚认为几何中的辅助线就是一种辅助元素，而利用已有结论和回归定义往往是引入辅助线的最好理由，波利亚还特别地道辅助线往往是解题过程中最炫目的一笔，同时聪明的读者也往往会追求辅助线引入的自然而然，这意味着高水平学生在解题过程中往往不满足于讲题目“完成”，同时还具有解题的“审美需求”，希望讲自己的解题过程进一步优化，具有数学上的美感。罗山（2020）将辅助线定义为“在进行几何正面过程中，现有图形条件不足以进行有效证明时，为了辅助解题所增添的一些线段或直线”。

为什么要构造辅助线？波利亚认为对辅助元素的引入不是随机的，是有迹可循的，他将引入辅助线的作用总结为三个：利用已知结论、回到定义、为了题目更为熟悉和完整。

各种几何证明中，辅助线的添法虽然多种多样，但其中的思维方式是：由条件出发的综合法模式，由结论出发的分析法模式，以及条件与结论同时出发的结合模式.笔者在教学实践中发现，由条件和结论同时出发的综合法模式比较受到学生的欢迎，也比较容易令学生上手，将常见的条件与常见的做法总结成“基本图形”与“常用结论”，把几何证明中的添辅助线的方法，总结成“中线倍长”、“角平分线翻折”、“截长补短”等常见口诀，可以让学生建立由条件和结论出发的分析法模式，并快速建立这种条件与结论之间的联系.

本文旨在对上海初中有关三角形与四边形的几何证明中的“中点”这一条件，进行分类分析，帮助师生建立相关的“基本图形”与“常用结论”.

一、中线倍长：

将一条线段分成两条相等线段的点叫做这条线段的中点，中点是一条线段的对称中心。当题目中出现中线条件，而原题又无从证明时，尝试将中线延长一倍，可以形成两个成中心对称的三角形,从而达到转化条件的目的,使转化后的条件与结论之间形成比较明显的联系.

例 1、如图 1.1，在$\triangle ABC$中，$AB \neq AC$，点D、E在线段BC上，且$DE = EC$，过点D作$DF \parallel AB$交线段AE于点F，且$DF = AC$，求证：AE平分$\angle BAC$.

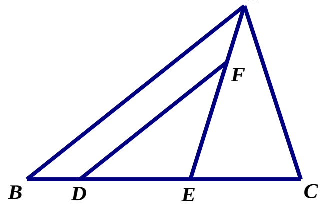


图 1.1

证明方法 1：（如图 1.2）延长线段AE到点G，使得$EG = AE$，联结线段DG，

$\because ED=EC, \angle DEG=\angle CEA, AE=EG$，

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle GED$，$\therefore AC=DG, \angle DGE=\angle CAE$

$\because DF=AC$，$\therefore DF=DG$，$\therefore \angle DFG=\angle DGE$
$\therefore \angle DFG=\angle CAE$
$\because DF /\!/ AB$，$\therefore \angle DFG=\angle BAE$
$\therefore \angle BAE=\angle CAE$.

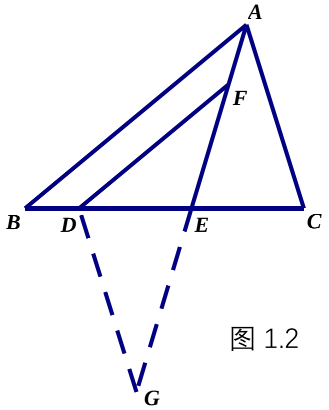


图 1.2

证明方法 2：（如图 1.3）延长线段 EF 到点 G，使得 $EG=EF$，联结线段 CG，
先证$\triangle DEF \cong \triangle CEG$，得 $CG=DF=AC$，
得 $\angle CAE=\angle G=\angle DFE=\angle BAE$.

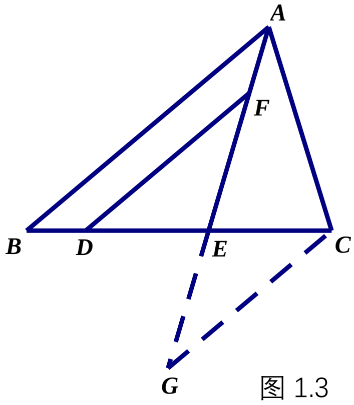


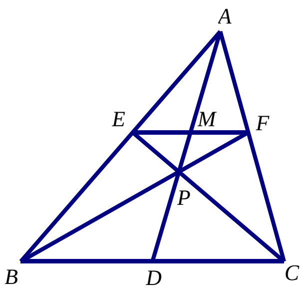
图 1.3

策略分析：此题解法是经典的“中线倍长”，构造全等三角形，从而证明结论. 方法 1，是从 $DE=EC$ 的条件出发，将线段 AE 看成$\triangle ADC$ 的中线，从而加倍线段 AE. 方法 2，是将线段 EF 看成$\triangle FDC$ 的中线，从而加倍线段 EF.

学生在遇到中点条件时，会遇到像此题一样，中线不明显的情况；或者，虽然将某条线段看成中线并延长一倍，但依然受困于该与线段的哪个端点相联. 这里可以把中点看成是中心对称的对称中心，将中点的某一侧的图形，对称到另一侧，从而判断中线倍长后的点与原图的哪一次相连. 此题中，有条件 $DE=AC$，$\triangle DEF$ 关于点 E 中心对称时，可以将线段 DF 中心对称到线段 CG，这样就是将线段 EF 延长一倍并联结 CG；$\triangle ACE$ 关于点 E 中心对称时，可以将线段 AC 中心对称到线段 DG，这样就是将线段 AE 延长一倍并联结 DG.

例 2、如图 2.1，已知在$\triangle ABC$ 中，点 P 是中线 AD 上一点，BP、CP 的延长线分别交 AC、AB 于点 F、E，线段 EF 交 AD 于点 M.
求证： $EF /\!/ BC$.

证明：（如图 2.2）延长线段 PD 到点 G，使得 $DG=DP$，联结线段 BG、CG，
$\because BD=CD$， $DP=DG$，
$\therefore$ 四边形 $BGCP$ 是平行四边形，
$\therefore BG /\!/ CP$， $CG /\!/ BP$，
$\therefore \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AP}{PG}$，$\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AP}{PG}$，$\therefore \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{FC}$
$\therefore EF /\!/ BC$.



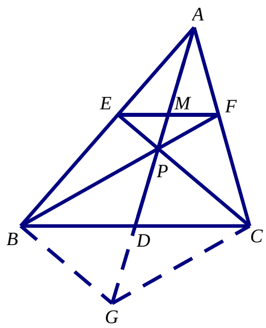


图 2. 1　　　　图 2. 2

策略分析：这是初三第 24 章比例线段的一个习题，要得出 $EF /\!/ BC$，要先得出 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{FC}$，而要得出类似 $\dfrac{AE}{EB}$ 的比例式，需要构造出平行线来，而中线倍长就是构造比例

线段的一个重要手段．中线倍长之后，由对角线互相平分的四边形是平行四边形，可以得出两对平行线，在没有学四边形之前，也可以中线倍长后，构造以中点为对称中心的全等三角形，从而出现内错角相等，得到平行线．

例 3、已知如图 3.1，在$\triangle ABC$中，点D是边BC的中点，$\angle EDF=90^{\circ}$，线段DE交边AB于点E，线段DF交边AC于点F．求证：$BE+CF>EF$．

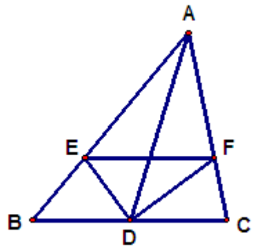


图 3.1

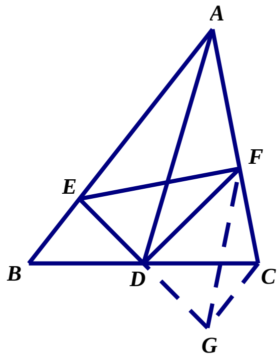


图 3.2

证明：（如图 3.2）延长线段ED到点G，使得$DG=ED$，并联结GC、GF．

$\because BD=CD,\angle BDE=\angle CDG,ED=DG$，$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDG$，$\therefore BE=CG$，

$\therefore BE+CF=CG+CF>FG$，对比题目中待求证的结论，接下来只要证明$EF=FG$即可．

$\because ED=GD,\angle EDF=\angle GDF=90^{\circ},DF=DF$，$\therefore \triangle EDF\cong\triangle GDF$，$\therefore EF=GF$，

$\therefore BE+CF>EF$．

策略分析：此题在证明过程中，将中线“ED”延长了一倍，这个做法虽然非常符合“中线倍长”这句口诀，但是学生在自己尝试解决时，即使已经经历了其它的“中线倍长”的例题，也很难想到延长“ED”，因为图中更具“中线”属性的是线段AD，而延长AD之后，对题目中的线段BE、CF、EF没有发生转化，故延长AD的做法被排除．此题也给学生一种提示，所谓“中线倍长”中的“中线”，可以是过中点的一条线段．

如果用“以点D为中心进行中心对称”的想法去理解，此题中$\triangle BDE$以点D为中心进行对称之后，得到线段CG，刚好与线段CF构成了新的三角形的两边，正好与“两边之和大于第三边”的定理相符，可以证明题中结论．

二、中点与等腰三角形的三线合一相结合

例 4、如图 4.1，ΔABC是一个等腰三角形，$AB=AC$，点M是边BC的中点，点O

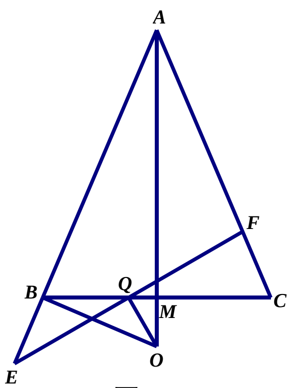


图 4.1

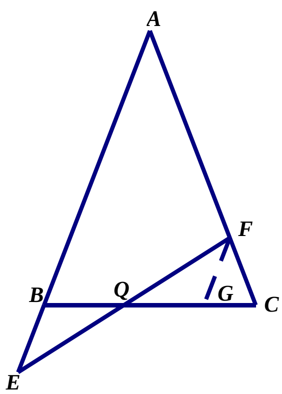


图 4.2

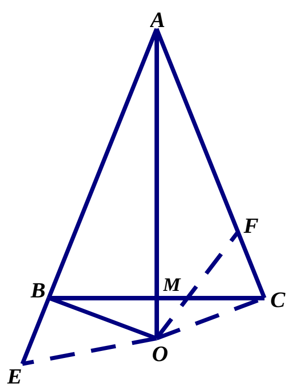


图 4.3

是线段 AM 的延长线的一点，且 $OB \perp AB$，点 Q 是线段 BC 上不同于点 B 和点 C 的任意一点，过点 Q 作直线 EF，交边 AB 的延长线于点 E，交边 AC 于点 F，且 $QE = QF$，求证： $OQ \perp EF$.

证明：（如图 4.2）在线段 QC 上截取线段 $QG = QB$，并联结 GF，

$\because BQ = QG, \angle BQE = \angle GQF, QE = QF$，$\therefore \triangle BQE \cong \triangle GQF$，$\therefore BE = FG, \angle E = \angle QFG$，

$\therefore BE /\!/ FG$，$\therefore \angle FGC = \angle ABC = \angle C$，$\therefore BE = FG = FC$；

（如图 4.3）联结 OE、OC、OF，

$\because OB = OC, \angle OBE = \angle ABO = 90^{\circ} = \angle ACO, BE = CF$，$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF$，

$\therefore OE = OF$，$\because QE = QF$，$\therefore OQ \perp EF$.

策略分析：此题证明过程分两部分，第一部分是由 $QE = QF$ 这个条件，即点 Q 为线段 EF 中点，联想到关于中点进行中心对称的想法，截取了线段 QG，从而得到了 $BE = CF$；第二部分是从结论的 $OQ \perp EF$ 与条件的 $QE = QF$，联想到等腰三角形三线合一，即只要证明 $OE = OF$ 即可.

三、平行线所夹线段的中点

例 5、如图 5.1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，点 G、H 分别为线段 BD、AC 的中点，若 $AD = 10$，$GH = 6$，求边 BC 的长.

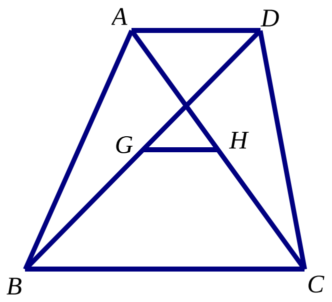


图 5.1

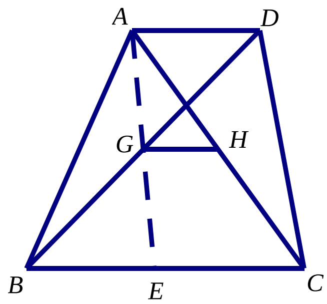


图 5.2

证明：（如图 5.2）联结线段 AG 并且延长 AG 交线段 BC 交于点 E，

$\because AD /\!/ BC$，$\therefore \angle DAG = \angle BEG$，$\angle ADG = \angle EBG$，且 $GD = GB$，$\therefore \triangle ADG \cong EBG$，

$\therefore BE = AD = 10$，且 $AG = GE$，

$\because AH = HC$，$\therefore CE = 2GH = 12$，$\therefore BC = BE + EC = 10 + 12 = 22$.

策略分析：当两条平行线之间夹着某条线段的中点已知时，过这个中点的直线被两条平行线所截得的线段，也是被这个中点平分的. 也就是，在两条平行线之间夹着的某条线段的中点已知时，可以构造出一对以这个中点为对称中心的三角形，然后用这对中心对称的全等

三角形的性质，和其他条件结合，可以得出进一步的结论.

四、中点与直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半相结合

例 6、如图 6.1，在ΔABC中，点P为边BC的中点，直线a绕顶点A旋转，若点B、P在直线a的两侧，$BM\perp a$于点M，$CN\perp a$于点N，联结PM、PN. 求证：$PM=PN$.

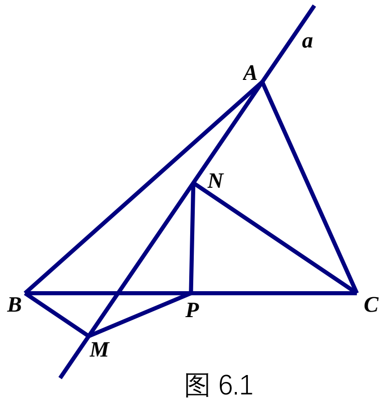


图 6.1

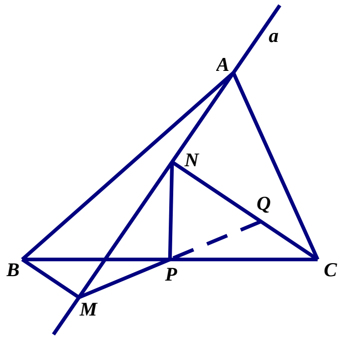


图 6.2

证明：（如图 6.2）延长MP交线段CN于点Q，

$\because \angle BMN=\angle CNM=90^{\circ}$，$\therefore BM /\!/ CN$，$\therefore \angle PBM=\angle PCQ, \angle PMB=\angle PQC$，

又$\because BP=CP$，$\therefore \triangle PBM\cong\triangle PCQ$，$\therefore PM=PQ$

$\because \angle MNQ=90^{\circ}$，$\therefore PN=\dfrac{1}{2}MQ=PM$.

策略分析：此题有类似于例 5 中，平行线所夹线段的中点的条件，所添辅助线也类似于例 1、例 2 的中线倍长，也就是将$\triangle PBM$关于中点P中心对称，但是在作辅助线时，写成延长MP交线段CN于点Q，因为此题线段BM与线段CN是平行的，延长线段MP交线段CN于点Q就能达到倍长线段MP的效果. 当某条线段（线段BC）夹在两条平行线之间（$BM /\!/ CN$），且已知这条线段的中点，用延长过中点的线段的方式，得到两个关于中点中心对称的全等三角形，是一种“基本图形”. 最后将直角三角形与斜边中点相结合，由斜边上的中线是斜边的一半的定理，得出结论.

例 7、如图 7.1，已知四边形$ABCD$中，$\angle BAD=\angle D=90^{\circ}$，$BM=CM=CD$，求证：$\angle AMC=3\angle BAM$.

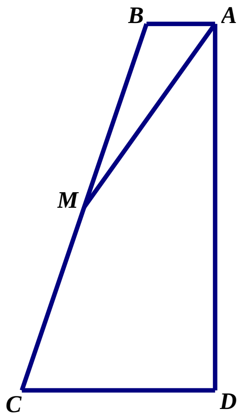


图 7.1

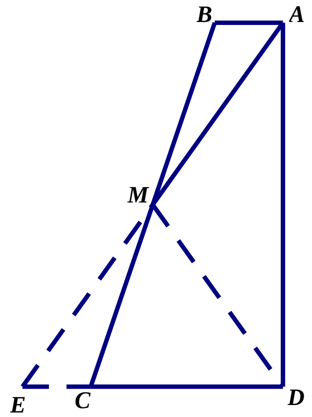


图 7.2

证明：（如图 7. 2）延长 AM 、 DC 交于点 E，联结 MD.

$\because AB /\!/ CD$，且 $BM = CM$ ，同例 4 可证 $\triangle ABM \cong \triangle ECM$ ，得 $AM = ME$ ，

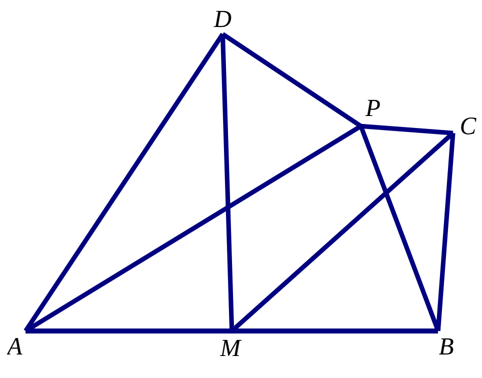
$\because \angle ADE = 90^\circ$, $\therefore MD = \dfrac{1}{2} AE = ME$, $\therefore \angle MDE = \angle E = \angle BAM$, $\therefore \angle AMD = 2\angle BAM$,

$\because CM = CD$, $\therefore \angle CMD = \angle CDM = \angle BAM$, 得 $\angle AMC = \angle AMD + \angle CMD = 3\angle BAM$.

策略分析：此题与例 5、例 6 有相似之处，即在两条平行线（ AB 与 CD ）之间有一条线段 BC，且已知线段 BC 的中点 M ，所以延长 AM 交 CD 与点 E，得到了关于中点 M 中心对称的两个三角形，从而得到直角三角形斜边上的中线的“基本图形”.

五、综合运用

例 8、如图 8.1，在凸四边形 $ABCD$ 中， M 为边 AB 的中点，且 $MC = MD$ ，分别过 C, D 两点，作边 BC, AD 的垂线，设两条垂线的交点为 P .求证： $\angle PAD = \angle PBC$.



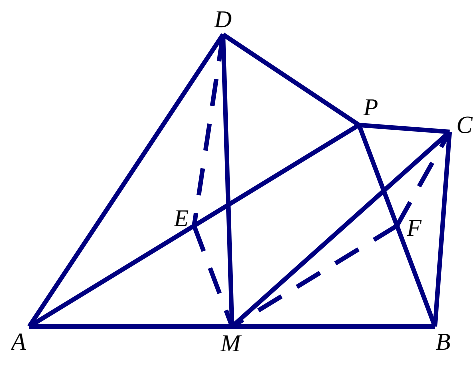


图 8.1　　　　图 8.2

证明：（如图 8.2）分别作线段 AP 、线段 BP 的中点 E 、 F ，联结 DE 、 ME 、 CF 、 MF ，

$\because ME$ 、 MF 是 $\triangle ABP$ 的中位线， $\therefore EM /\!/ BP$， $EM = \frac{1}{2} BP$， $FM /\!/ AP$， $FM = \frac{1}{2} AP$，

$\therefore$ 四边形 $EMFP$ 是平行四边形，$\therefore \angle PEM = \angle PFM$，

$\because \angle ADP = 90^{\circ}$，$EA = EP$ $\therefore DE = \frac{1}{2}AP = AE$，$\therefore DE = FM$，同理，$EM = CF$，

又 $\because MD = MC$，$\therefore \triangle MED \cong \triangle CFM(SSS)$，$\therefore \angle DEM = \angle MFC$，
$\therefore \angle DEM - \angle PEM = \angle MFC - \angle PFM$，即 $\angle DEP = \angle PFC$，
$\because DE = DA$，$\therefore \angle DEP = 2\angle PAD$，同理 $\angle PFC = 2\angle PBC$，
$\therefore \angle PAD = PBC$.

策略分析：当题目中有中点条件时，但又对直接证明题目帮助不明显时，我们可以考虑初中平面几何证明中，与中点有关的定理，比如等腰三角形三线合一、中线倍长、斜边上的中线是斜边的一半、中位线定理等，此题有 $\angle ADP$ 为直角，点 M 是线段 AB 的中点，通过作斜边 AP 的中点，既可以构造出斜边 AP 的中线 ED，又可以构造出另一条斜边 BP 的中位线 EM，这两条线段和已知线段 DM 构成了一个三角形，与另一个同理构造的三角形全等，从而使命题得证。

综上所述，当几何证明问题中，出现线段上中点的条件时，往往可以和问题的求证的结论或问题中的其他条件相结合，来考虑解题的策略。如果条件中有中点，而结论中涉及中线的两倍，往往可以采取中线倍长策略；当需要求证的结论中的线段之间彼此没有直接联系的时候，也可以尝试中线倍长的策略，从而使相关线段关于中点中心对称之后，原本没有直接联系的线段，构成新的三角形。当中点所在的线段位于某两条平行线之间时，往往以中点为对称中心构造全等的三角形。当图形中有中点还有直角的时候，往往可以考虑构造直角三角形斜边上的中线。还有构造中位线等策略。希望总结这些策略，有助于我们老师的教学和学生的学习。

参考文献：

[1]李萍.初中平面几何中怎样构造辅助图形的研究与实践 湖南师范大学硕士学位论文

[2]罗山.辅助线在初中平面几何解题教学中的应用研究[D]，西南大学，2020

[3]石帧.八年级学生在运用辅助线解几何证明题上的表现 华东师范大学研究生学位论文

[4]波利亚 怎样解题 上海科技教育出版社