以练促学，让学生在解题过程中讨论方法优化

——以“三角形内接矩形求其边长”教学设计为例

上海市徐汇区教育学院附属实验中学　　王诗惠

[摘要]《义务教育数学课程标准（2022 年版）》中：“学生的学习应是一个主动的过程，认真听讲、独立思考、动手实践、自主探究、合作交流是学习数学的重要方式。[1]”本节课围绕“三角形内接矩形求边长”的问题，与学生合作互动，在多种解题方法的基础上完成方法优化，知道这类问题的图形变化特征，能够运用几何图形的基本性质进行推理证明。

[关键词] 三角形内接矩形求边长　方法优化　合作交流

九年级在学习了相似三角形的性质后，需要综合运用相似三角形的判定定理、性质定理及其它相关知识解决问题，其中一种应用就是——三角形内接正方形（矩形）求其边长。在解题过程中，学生会有自己的思考和解题方法，单一的教师讲授式不利于发展与提升学生在解决数学问题上的能力。本节课将例题进行系列化设计，把课堂交给学生，不断激发学生们思考，进行解题方法和想法上的碰撞。

一、　备课想法

九年级的学生在解题过程中的思路是较为广泛的，他们也很善于利用已有知识解决未知问题，也更喜欢有思维和新方法上的碰撞。本节课的教学目标之一是利用相似三角形的性质定理 1，相似三角形的高之比等于相似比去解决三角形内接矩形求其边长这一类问题。但很明显，能解决这类题目的方法远远不止这一种，若是教师直接告知学生用相似三角形的性质定理 1 去解决这道题，未免有些类似“填鸭式教学”，将知识点硬塞给学生，既不会激起学生学习和思考的动力，又会让学生对此学习产生疑惑：“这是唯一的解题方法吗？”“如果不是唯一的解题思路，那为什么选择这种方法解决题目？”“这个解题思路是有很好的优势吗？”我认为，课堂上的教学应该是解决学生的疑惑，而不是在学完后让学生对今天学习的内容留下未解决的疑惑。

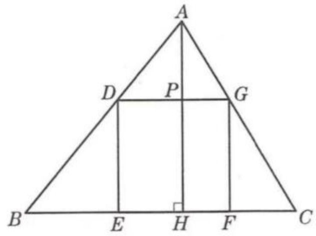
如果学生能够自主完成探究，为什么不将课堂交给学生呢？或许学生能带给我们更多的惊喜和想法。带着这样的想法，我将进行如下设计。

二、 教学环节

（一） 问题探究

1. 抛出问题

例 1：如图，正方形 DEFG 的边 EF 在△ABC 的边 BC 上，顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上，已知△ABC 的边 BC 长为 60 厘米，高 AH 为 40 厘米，求正方形 DEFG 的边长。



设计问题：（1）结合题目条件，观察图形，你能观察出什么？

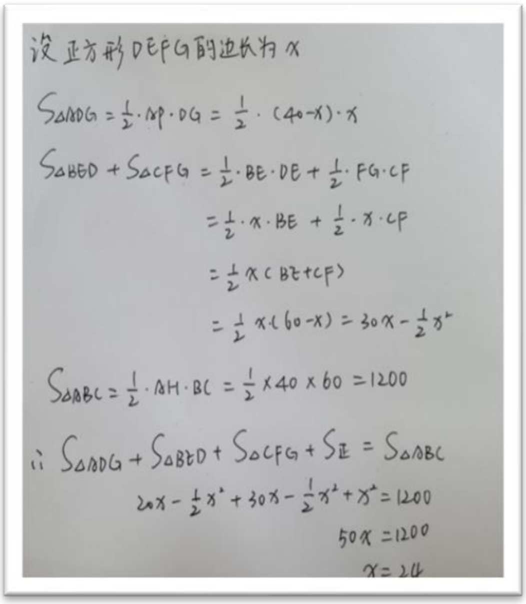
（分析图形的性质，建立形与数的联系。）

（2） 根据图形，分析题目条件，你可以得到哪些知识点？你会运用什么方法完成这道题？

2. 学生方法展示

（1） 方法一

学生甲： 老师，根据题目条件，我可以得到图中的大三角形 ABC 的面积是是 1200。这个三角形的内部分成了三个三角形和一个正方形，设正方形的边长为 x，这几个图形的面积都可以用 x 表示出来的，其中左右两个直角三角形因为等高，所以面积可以放在一起计算。通过四个图形的面积和等于△ABC 的面积列出方程，这样就可以计算出正方形的边长了。



设正方形DEFG的边长为 x

$S_{\triangle ADG}=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot DG=\frac{1}{2}\cdot(40-x)\cdot x$

$S_{\triangle BED}+S_{\triangle CFG}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot DE+\frac{1}{2}\cdot FG\cdot CF$

$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot BE+\frac{1}{2}\cdot x\cdot CF$

$=\frac{1}{2}x(BE+CF)$

$=\frac{1}{2}x\cdot(60-x)=30x-\frac{1}{2}x^2$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AH\cdot BC=\frac{1}{2}\times 40\times 60=1200$

$\because S_{\triangle ADG}+S_{\triangle BED}+S_{\triangle CFG}+S_{正}=S_{\triangle ABC}$

$20x-\frac{1}{2}x^2+30x-\frac{1}{2}x^2+x^2=1200$

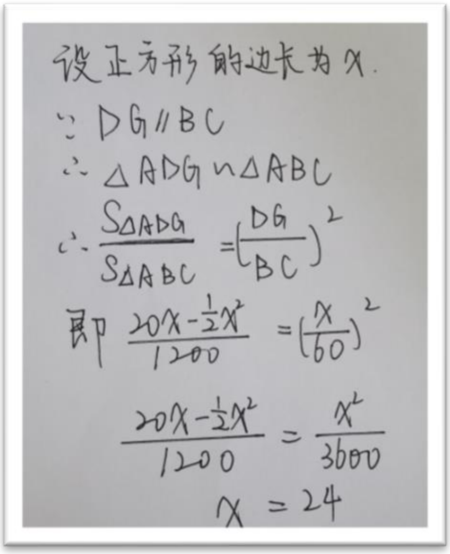
$50x=1200$

$x=24$

（2） 方法二：

学生乙：老师，我觉得他的那个方法有些麻烦。这道题目中有一个正方形，正方形的对边是平行，那么根据相似三角形的预备定理，因为 DG∥BC，所以

$\triangle ADG \sim \triangle ABC$。我们正好前不久学习了相似三角形的判定定理和性质定理，我就想着能不能利用新学的知识来解决这道题。△ABC 的面积是 1200，△ADG 的面积可以用未知数 x 表示出来。再根据相似三角形性质定理三，相似三角形的面积比等于相似比的平方，我可以列出关于 x 的方程，求解出边长就可以了。


设正方形的边长为x.

∵ DG∥BC

∴ △ADG∽△ABC

∴ $\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{DG}{BC}\right)^2$

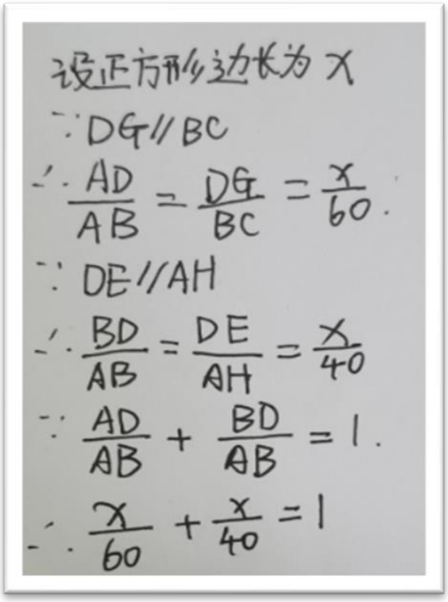
即 $\frac{20x-\frac{1}{2}x^2}{1200}=\left(\frac{x}{60}\right)^2$

$\frac{20x-\frac{1}{2}x^2}{1200}=\frac{x^2}{3600}$

$x=24$

（3） 方法三：

学生丙：正方形的对边是相互平行的，也就是三角形一边的平行线的性质定理也是能使用的。我观察到这道题目中有三个 A 字型，对应线段成比例。所以我想找到它们之间的联系。然后我就发现 $\frac{AD}{AB}+\frac{BD}{AB}$=1，这样，我就可以根据这个等式列出关于 x 的方程了。这个方程是一元一次方程，也非常好计算。


设正方形边长为x

∵ DG∥BC

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{DG}{BC}=\frac{x}{60}$.

∵ DE∥AH

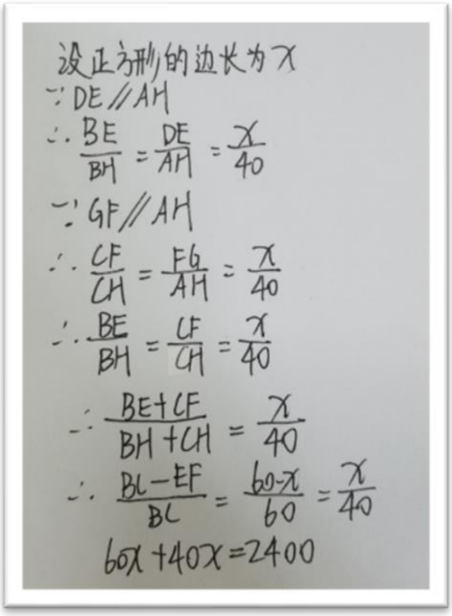
∴ $\frac{BD}{AB}=\frac{DE}{AH}=\frac{x}{40}$

∵ $\frac{AD}{AB}+\frac{BD}{AB}=1$.

∴ $\frac{x}{60}+\frac{x}{40}=1$

（4） 方法四：

学生丁：我和同学丙的想法是一样的，我也同样观察到这个三角形中有几个 A 字型可以使用。我找的是左右两个的 A 字型，当我将对应边成比例列出来后，我发现通过等量代换可以得到 $\frac{BE}{BH}=\frac{CF}{CH}=\frac{x}{40}$，再通过等比性质可以得到 $\frac{BE+CF}{BH+CH}=\frac{x}{40}$,这样就可以列出关于 x 的方程并进行求解。


设正方形的边长为x

∵ DE∥AH

∴ $\frac{BE}{BH}=\frac{DE}{AH}=\frac{x}{40}$

∵ GF∥AH

∴ $\frac{CF}{CH}=\frac{FG}{AH}=\frac{x}{40}$

∴ $\frac{BE}{BH}=\frac{CF}{CH}=\frac{x}{40}$

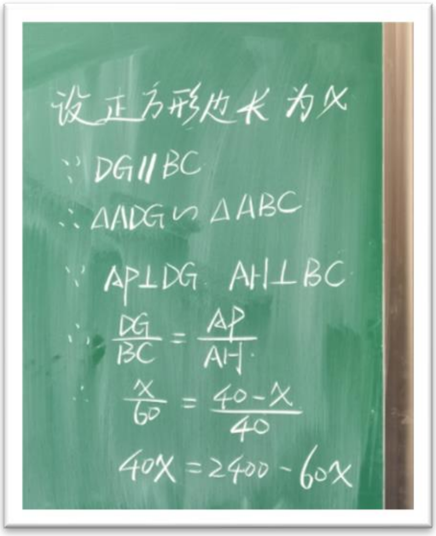
∴ $\frac{BE+CF}{BH+CH}=\frac{x}{40}$

∴ $\frac{BC-EF}{BC}=\frac{60-x}{60}=\frac{x}{40}$

$60x+40x=2400$

（5） 方法五：

学生戊：老师，我觉得我这个方法应该是更简单的。因为这两个相似三角形中都有高，所以我就想能不能用相似三角形的性质定理1。因为 DG∥BC，所以$\triangle ADG\sim\triangle ABC$。因为题目中有这两个三角形的高，那么就可以得到$\dfrac{DG}{BC}=\dfrac{AP}{AH}$,再根据这个等式列出方程，是一元一次方程，也非常的好解。



3. 比较方法

师：同学们真棒，想出这么多的方法。能够根据已有知识学以致用。我看有些同学一直在观察这些方法，那我们也来一起讨论一下，你觉得你会选择哪个方法？为什么？ 可以小组讨论。

（学生们相互讨论，阐述自己的想法）

学生 1：老师，我觉得第一个方法是很好理解，就是三角形和正方形的面积和等于大三角形，但是计算和过程太麻烦，容易出错。

学生 2：第 2 个方法虽然也简单，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方，但是它是一元二次方程，我觉得计算没有一元一次方程简单。

师：同学们同意这两位同学的想法吗？（学生点头回应）

学生 3：另外 3 个方法最后都是一元一次方程，计算倒是不麻烦。但是觉得方法 3 和方法 4 都要利用 2 次 A 字型，去寻找他们之间的等式关系，过程方面有些麻烦，花时间，还容易找错关系。但是第 5 个方法很直接，就是相似三角形的相似比等于高之比，简单利落。我觉得我会选择最后一个方法。

师：同学们同意他的说法吗？（大部分同学点头回应）

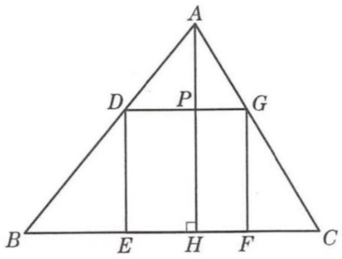
（此时尚不能明显体现出此方法既是三角形内接矩形求其边长的通法、优法，仍需要学生通过下列变式深刻感受和体验）

（二） 讲解与练习

1. 变式

变式 1：如图，正方形 DEFG 的边 EF 在△ABC 的边 BC 上，顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上，已知△ABC 的边 BC 长 a 厘米，高 AH 为 h 厘米，请用 a、h 的

代数式表示正方形 DEFG 的边长。



解：设正方形的边长为 x

∵DG//BC　　∴$\triangle ADG \sim \triangle ABC$

∵ $AP \perp DG$，$AH \perp BC$　　∴ $\dfrac{DG}{BC} = \dfrac{AP}{AH}$

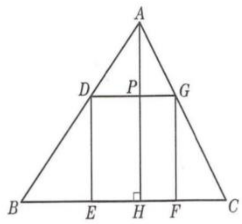
即 $\dfrac{x}{a} = \dfrac{h-x}{h}$　　$x = \dfrac{ah}{h+a}$

师：这道题我们有什么收获？

学生：正方形的边长只和大三角形的底和高有关。

【设计意图】例 1 中给了具体的数据，底为 60，高为 40，所以方便学生进行计算，方法也很多，但不是非常明显的体现出此类几何图形的性质，形与数的联系还未完全建立。变式 1 中底为 a 厘米，高为 h 厘米，学生进行计算后，观察最后的结果 $x = \dfrac{ah}{h+a}$，立马可以得到正方形的边长只和大三角形的底和高有关。至此，学生对此类题目的理解更加透彻。

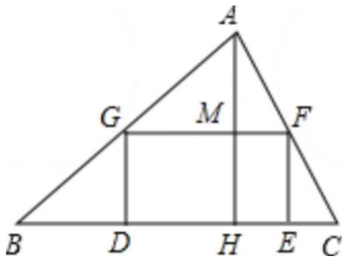
变式 2：如图，长方形 *DEFG* 的边 *EF* 在△*ABC* 的边 BC 上，顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上已知△ABC 的边 BC 长为 60 厘米，高 AH 为 40 厘米，如果 DE=2DG,求正方形 DEFG 的边长。



变式 3：如图所示，矩形 *DEFG* 内接于锐角△*ABC*, *AH* 是 *BC* 边上的高，*AH*=6,*BC*=12.

(1)*FG*=2*EF*,求矩形 *DEFG* 的面积.

(2)若 *FG*=*x*, $S_{矩形GDEF} = y$，写出 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域.



【设计意图】对例题进行系列化设计，由特殊到一般，变式 2 和变式 3 是三角形内接矩形。学生在做题过程中能更加感受到：相似三角形的高之比等于相似比是此类题目的通法、优法。

师：通过上面一系列题目，我们能够发现，从解题通性的角度出发，相似三角形的高之比等于相似比，是三角形内接矩形的通法。解题过程中，同学们都不

约而同的选择了此方法，说明了通法即为优法。

2. 学生课堂反馈

（1） 通过课堂观察了解学生的学习过程、学习态度和学习策略

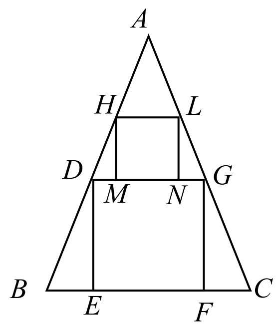
学生在做变式 2 和 3 时，我下去来回巡视。大部分同学都选择通法，只有个别学生在使用之前的方法，但很快就发现在过程上有些繁琐，并及时进行了调整。

（2） 学生的题目完成情况

一路巡视下来，学生无论是时间把控上，还是计算准确率上都是可以的。遇到停笔不动的学生，我也立马停下来询问是哪里还有困惑的地方，帮助学生解决问题。

（三） 拓展提高

如图，正方形 DEFG 的边 EF 在△ABC 的边 BC 上，顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上.正方形 HMNL 的边 MN 在边 DG 上，顶点 H、L 分别在边 AB、AC 上。已知△ABC 的边 BC 长为 60 厘米，高 AH 为 40 厘米，求正方形 DEFG 的边长和正方形 HMNL 的边长。



【设计意图】学生已经较为扎实的掌握此类问题解决的通法，对此类题目再次变形，形式变化、难度提升。适当拔高，引导学生深入思考。

三、 教学反思

作为一名教师，既要从教师的角度，备教材、备课堂、备学生、备环节、备题目等等，也需要从学生的角度去思考怎么讲好一节课，预设学生的回答。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。

在义务教育阶段，数学眼光主要表现为：抽象能力、几何直观、空间观念与创新意识。几何直观主要指运用图表描述和分析问题的意识和习惯。分析图形的性质，建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型。[1]我将问题抛出后，

学生便开始积极思考；下去巡视时，发现很多学生边写边画，进行方法的实践。在第一位学生的带领下，更多的学生投入到这道题目中，聆听他人的思路和想法；也有些学生能够举一反三，根据其它同学的思路，类比得到类似方法（例如方法 3 和方法 4），期间课堂的氛围都很热烈。期间我将这 5 位学生的方法通过希沃助手投屏在大屏幕上，配合学生的讲解分享。令我很欣喜的是，从孩子们欢快激烈的讲解分享中，我感受到他们对于自己方法的自信，也感受到了以练促学的效果。当多种方法出来后，其实学生也在观察，看其利弊。乘势而上，我立马引导学生进行对比。你觉得你会选择哪个方法？为什么？学生的说法有很多，有从计算复杂程度的，有从过程长短的，有从思路简单的，有从方程次幂来看的。很快，大部分学生都能得出自己会选择利用第 5 种方法通法：相似三角形的高之比等于相似比。这样的一个教学环节就在学生积极主动，兴致盎然的自主探究下顺利的完成了，效果显而易见，学生的参与度高，接受也很快。

确定了方法以后，再带着学生完成变式 1。学生很快发现，三角形内接正方形的边长只和大三角形的底和高有关。当通过三角形内接正方形的讨论决定好解题方法后，就可以由特殊到一般，直接到变式 2 和变式 3 的三角形内接矩形。给学生留好充分的思考时间，学生通过解题过程也能够发现，只要已知内接矩形的长宽关系、周长、面积等等，还是可以使用相同的解题思路解决问题，学生的思维得到了升华。随后，再请学生总结一下本节课的内容，教师板书。通过合理有效的问题设计，引导学生深入思考，解决思维上的难点，帮助学生思维上的顺利前进。整个课堂学生一直在进行思考，进行思想上的碰撞融合，合作交流，极大地激发学生的兴趣，使得课堂效果较佳。通过课堂呈现和作业反馈，学生对此类问题的解决较为完整。

作为一名青年教师，初次带九年级，才发现了很多不一样的地方。初三的教学和低年级教学有很大的不同，很多课更加适合单元化教学，从整体单元出发，找到切入点，强化学生的结构化学习。我也更加意识到要结合数学课程标准去备课和教学。课堂更应该交给学生去发挥，九年级学生大部分新知学习已结束，所以在做题过程中他们有很多方法可以使用。有时候我的解题思维会被当天的知识点所固化，我经常能在学生的回答中得到惊喜和理解。

以练促学，通过例题的系列化设计，将课堂交给学生。通过生生、师生合作交流，高效完成教学目标，也更加立足于学生核心素养发展，集中体现数学

课程育人价值。

[参考文献]

1.中华人民共和国教育部全日制义务教育数学课程标准[S]北京:北京师范大学出版社,2022.