

基于深度学习的高中数学课堂实践与思考

——以“三次函数的图像和性质”为例

南洋模范中学 白云

摘要

本文从深度学习理念和过程出发，以高考重点“三次函数的图像和性质”为例，探讨了深度学习在培养学生思维能力和创新能力方面的实践应用，实现了有益的探索和实践，取得了良好效果。本文阐述了如何在课堂教学中运用深度学习理念，通过精心设计的问题链，层层递进地展开探究活动，课堂上教师引导学生对开放性问题进行合理猜想和严谨论证，充分展示了学生在解决问题时的创新思维和多样化策略。这一实践有效提升了学生的主动探索能力和数学思维能力，有力促进了学生核心素养的培养。

关键词：深度学习；三次函数；思维能力；创新能力；核心素养

一 引言

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》^[1]指出：课程结构设计关注数学逻辑体系、内容主线、知识之间的关联。根据新课标和教改要求，深度学习是深化课程改革、更新教育理念、落实核心素养的重要路径。

针对高中数学学科而言，深度学习是以数学的核心内容为载体，以提升学生的数学思维品质与数学核心素养为目的，以整合分析与理解相关内容本质为策略，精心设计问题与情境，引发学习者围绕具有挑战性的学习主题，全身心积极参与、体验成功、获得发展的有意义的学习过程^[2-3]。深度学习模型主要由三大环节七个部分构成，每个环节对应相应的内容，凸显出深度学习的特征^[4-5]，具体如图 1。教师在数学教学中需要加强深度学习理念的应用，重塑教学设计，创设问题情境，理清教学内容的逻辑，从学生的已有认知出发，引导学生深入思考，进而迁移到其他问题的探究和解决，促进学生数学学科核心素养的发展。

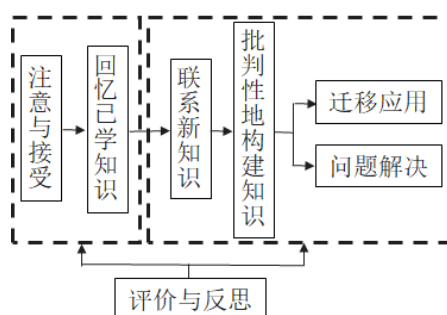


图 1 深度学习的一般过程

近年来,很多学校和优秀教师依托深度学习理念开展数学教学项目和课题研究,如教育部基础教育课程教材发展中心实施“深度学习”教学改进项目实验工作方案、重庆市规划办课题《基于深度学习的高中数学概念教学实践研究》等。综合来看,围绕深度学习的理论构建、实施策略、评价体系以及对学生学习成效的影响等研究成果相当丰富,这些成果能显著提升学生的理解力和参与度,有助于学生掌握知识本源,但深度学习在学生思维能力和创新能力的培养实践中,仍面临诸多挑战和问题,需要加以探索和实践。

新课标中提到:借助导数,会求闭区间上一元三次函数的最大值与最小值。本文以“运用导数研究三次函数的图像和性质”为例,结合复习课特点,采用深度学习教学策略,创设富有启发性的情境,设计了一系列开放性的、具有挑战性的问题,引导学生深入探索,构建起全面系统的知识体系,鼓励学生提出新的观点和方法,敢于在未知情境中运用知识,培养学生的数学思维能力,激发其创新潜能,提升核心素养。

二 教学内容

本文选择“运用导数研究三次函数的图像与性质”实施教学设计与分析,教材中这一单元包含导数的概念及意义、导数的运算、导数的应用三个部分。在复习了前两部分后,本节课以一个函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + cx + d$ 贯穿始终,将深度学习理念渗透在课程教学的各个环节,主要的教学流程和安排如图 2。

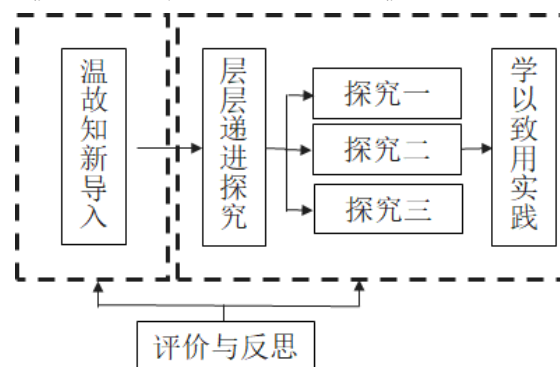


图 2 深度学习过程

1. 温故知新导入：构建新旧知识的联系纽带

问题 1: 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$, 若 $c = -3$, $d = 2$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

利用导数研究函数的单调性,这不仅是学生需要掌握的基本方法,也是理解和分析函数性质的基本工具。课程以问题 1 导入,立足于教材,整合改编例

题，从具体的三次函数出发，在复习旧知的同时，引导学生总结利用导数研究单调性的基本步骤，引出对三次函数性质的进一步探究。

2. 层层递进探究：深化理解与发掘新知的阶梯

古希腊哲学家苏格拉底曾言：“教育不是灌输，而是点燃火焰”。课程设计遵从这一精神，在探究过程中，精心设计层层递进的问题链，旨在点燃了学生思维的火花，引导他们深入探索知识，巩固已有知识并不断拓展，形成更为完整和深入的知识体系。学生在解决问题的过程中，锻炼了逻辑思维、创新与实践能力，这样才能真正落实数学核心素养的培养。

探究一

问题 2： 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$, 若 $c, d \in \mathbb{R}$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性和极值.

引导学生从特殊到一般，按照问题 1 的研究思路，深入探索含参数的三次函数的单调性。首要任务是找到导数为零的驻点，其存在与否和判别式息息相关。在此处分类讨论的数学思想显得尤为必要和重要，教师进一步引导：

对于函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ ，还需要考虑哪些因素呢？

通过连续提问，促进学生的思维生成；探讨三次项系数 a 的正负，深化分类讨论思想。这种研究不仅加深学生对单调性的理解，还能锻炼他们运用单调性分析极值、最值等复杂问题的能力，从而培养他们的逻辑思维和问题解决能力。同时，借助函数的性质绘制草图，学生将抽象问题具体化，可以直观地观察并理解其单调性和极值情况。这样的设计既提升了学生的数学分析能力，又为后续探究函数零点问题，应用数形结合思想打下基础。

探究二

问题 3： 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$, 若 $c + d = 0$, 且 $c < 1$, 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

探究二是对探究一的进一步深化，实现了教学的连贯性，更深度挖掘了相关知识，符合学生的思维逻辑和认知规律。学生结合函数图像（图 3），分析函数图像与 x 轴的交点情况，并转化为代数表达式，从而讨论函数的零点情况。这一过程不仅增强了对函数零点的理解，还提升了学生在几何与代数间转化问题的能力，加强了知识的综合应用。

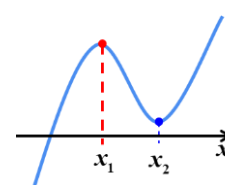


图 3 函数零点

探究三

问题 4: 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$, 若 $c + d = 0$, 讨论函数 $f(x)$ 的对称性.

在探究三的教学过程中, 从形的角度大胆猜想三次函数的对称性是一项富有挑战和探索性的任务. 为此, 教师给予学生充足的时间与空间, 鼓励他们勇于猜想并大胆假设. 学生们在小组内积极分享各自的猜想, 并深入探讨可能的原因与依据. 与此同时, 借助多媒体展示不同参数下的函数图像, 观察并探索其对称性质. 这一教学过程旨在培养学生的观察力、分析力和创新思维, 帮助他们更深入地理解三次函数的对称性.

学生往往对此类抽象问题的解决存在困难, 教师可以进一步引导:

请你写出一个三次函数, 并判断其对称中心.

鼓励学生从特殊函数入手, 如函数 $y = x^3$, $y = x^3 - x$ 作为奇函数具有对称中心 $(0, 0)$, 进而通过图像平移得到函数 $y = x^3 - x + 1$, $y = (x-1)^3 + (x-1) + 1 = x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \cdots \cdots$ 的对称中心, 合理猜想出三次函数有对称中心. 教师追问:

你有哪些方法求解或验证三次函数的对称中心呢?

通过开放性、发散性的问题, 引导学生深入探索, 这种提问方式既清晰又具体, 包含着对学生解题策略多样性的期待. 学生提出, 可设对称中心为 (m, n) , 运用待定系数法, 通过比较系数求解; 或运用定义法, 验证

$f(m+x) + f(m-x) = 2n$ 来确定对称中心等. 这些方法充分展示了学生在解决问题时的创新思维和多样化策略, 更体现了他们在深度学习过程中的主动探索与数学思维的显著提升, 进而总结出以下结论:

①函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 的图像是中心对称图形, 其对称中心是 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$;

②函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 有极值时, 其对称中心是这两个极值对应点的中点.

3. 学以致用实践: 知识能力双提升

问题 5: 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$, 若 $f(x)$ 有三个不同的零点, 且它们构成等差数列, 求 $c + d$ 的值.

解析 因为 $f(x)$ 有三个不同的零点, 不妨设 $x_1 < x_2 < x_3$, 由它们构成等差数列可知, 函数 $f(x)$ 的图像关于 $(x_2, f(x_2))$ 成中心对称, 由结论知 $f(x)$ 的对称中

心 $(1, f(1))$ 在 x 轴上, 故 $f(1) = \frac{1}{3} - 1 + c + d = 0$, 得 $c + d = \frac{2}{3}$.

面对问题 5 时, 若从零点定义出发, 可直接转化为多元方程组进行求解, 这样不仅计算量大, 而且需要相当高的技巧, 对学生来说无疑是一个巨大的挑战。然而, 当我们活学活用地借助三次函数的对称性质后, 问题变得直观且简洁, 大大简化了求解过程。这种方法的运用不仅体现了数学思维的灵活性, 也展示了对称性质在解决复杂问题时的强大威力。

教师的教学设计精准契合学生的思维逻辑, 有助于知识的自然累积与有效掌握。这种设计使学生更深入地理解和应用所学, 确保学习的连贯性和深度。让学生在变中学: 探索发现; 在问中学: 思考质疑; 在动中学: 锻炼能力; 在练中学: 巩固提高。整体教学实现了由现象到本质、由具体到抽象的递进思路, 旨在深化概念理解, 培养数学抽象素养, 提升学生的抽象思维能力。

三 教学反思

1. 深度分析学生情况。一是学生原有知识的分析, 课前学生能够利用导数求解具体函数的单调区间, 但对含参问题有一定困难; 对于三次函数相关问题仅在作业、练习中零星遇到, 对求导、极值、单调区间进行了浅表的探索, 没有作出比较系统地、深入地研究。二是学生认知能力的分析, 学生在高中学习中已初步研究过一些函数的性质, 借助导数的工具来研究三次函数的图像和性质符合学生的认知规律, 自然而适当。

2. 明确教学课程目标。三次函数具有丰富的性质, 也是高中数学利用导数研究函数的一个重要载体, 研究的过程与方法具有普遍性、一般性, 可以迁移到其他函数的研究。本文以高三复习探究课为基础, 着重研究三次函数单调性、零点、对称性等问题, 既梳理完善三次函数的知识结构, 又提高学生探究问题、解决问题的能力, 从而拓展数学思维的广度和深度。

3. 深度设计教学流程, 高三的很多学生把沉浸在题海视为拼搏努力, 但新高考更重思维。我们的课堂教学力求通过深度的选题、设计, 将知识、方法串一串, 融一融, 辨一辨, 提升复习课的实效。深度落实学生主体, 学生是教学活动的主体, 需要给予学生充分的思考和探究时间, 在这个过程中体验遇挫、体验成功, 体验假设的大胆、论证的小心谨慎等等。课程设计上, 通过一题贯穿, 步步设问, 师生共探, 逐步渗透数形结合、特殊到一般、分类讨论、化归转化等思想方法, 借题发挥, 以点带面, 实现方法总结、思维提升的目标。课堂上通过不断设计新的变式或探究, 对课本知识和素材灵活分析, 变“练”题为“用”题, 夯实基础, 培养学生发散能力、应变能力和创新能力。

4. 学生课堂积极反馈。学生成功地将三次函数的多个性质(单调性、图像、

零点、对称性等）整合在一起学习，加深了对三次函数图像与性质的理解，完成了表 1 中知识体系的构建，显著提高了综合运用知识解决问题的能力。在这一过程中，学生的逻辑思维和推理能力得到了有效提升。课堂上学生积极讨论，对问题充满好奇与探索欲望。在小组讨论环节，学生能够尝试从不同角度和方法入手，寻找新的解题思路，展现了创新思维能力。他们不仅能够运用所学知识解决常规问题，还能够挑战一些具有难度的问题，表现出强烈的探索精神。

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	图像	单调性	极值	零点	对称性
$\Delta \leq 0$					
$\Delta < 0$					

表 1 课程评价

党中央、国务院在 2020 年印发的《深化新时代教育评价改革总体方案》^[6]中明确提出：“改变相对固化的试题形式，增强试题的开放性，减少死记硬背和机械刷题现象”，新高考命题探索“价值引领、素养导向、能力为重、知识为基”的综合考查模式，不断增强试题的应用性、探究性、开放性，注重考查学生的思维品质、创新能力、核心素养。因此，更需要我们在课程中开展深度学习，经教师的引导，辅以问题情境，促使学生主动观察、思考、探究，自主提问并解决问题，把握知识本质，提升思维能力，锤炼创新能力，铸就核心素养。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S]. 北京：人民教育出版社, 2020.

[2] 郭华. 深度学习及其意义[J]. 课程·教材·教法, 2016(11):27.

[3] 王洁. 在深度学习中发展自主探究能力[J]. 中国数学教育, 2020(6):7-11.

[4] Chew Fook Tim. 深度学习的拓展与外在条件[M]. 华东师范大学, 2010.

[5] 邵爱国. 指向深度学习的教学实践与反思[J]. 中学数学教学参考, 2023(6):32-33.

[6] 中共中央 国务院印发《深化新时代教育评价改革总体方案》
https://www.gov.cn/zhengce/2020-10/13/content_5551032.htm.