

# 基于过程性变式教学的初中数学单元设计

## ——以初中函数为例

徐汇中学 陆颖

**摘要** 在倡导加强教学内容的结构化研究的背景下,立足单元教学,通过制定明确的学习目标,创设合适的教学情境,设计丰富的学习活动,促进学生数学活动经验的积累,促进学生数学素养的提高。

**关键词** 单元设计 教学活动 函数

为落实十八大提出的“立德树人”根本任务、顺应深化课程改革的要求,开展大单元设计成为助力学科素养落地的关键路径,对于改变当前部分“知识点、习题项、活动控”为标志的数学课堂教学,具有重要的理论价值与现实指导意义。但不可否认的是,很多教师对学生应该拥有什么样的数学活动经验、应该运用怎样的方式指导学生获得经验等问题的认识是较为模糊的。

在数学教学的结构化中,数学教学的过程性变式优势明显,过程性变式教学所建立的学科逻辑系统,借鉴和引申到其他内容中,既能够完善已有认知体系和学习领会新内容的系统,又能将不同内容部分之间的关联尤其是思维方式联系起来,形成更全面的学科逻辑体系。所以,以过程性变式教学的方式构建单元活动教学设计是促进学生获得数学活动经验构建数学学科体系的有效方法和手段。

### 一、过程性变式教学和单元设计

#### 1.过程性变式教学

过程性变式教学是变式教学中两大组成部分之一,相对于概念性变式教学<sup>1</sup>,过程性变式更注重学生在学习活动过程中的体验感悟,并在学习认知过程中形成独有的学科思维方式和线索。这样的教学方式特别适合单元教学中建立知识点之间勾连,并加深学习体验的活动教学。

#### 2.单元教学

《教育大辞典》中将“教学单元”简称“单元”,认为它是教学的基本单位。教学单元是教材和教学活动的基本单位。

钟启泉指出,单元是基于一定目标与主题所构成的教材与经验的模块、单位,

<sup>1</sup> 变式教学源自1980年代上海市青浦区数学教改实验中对一线教师有效教学经验的筛选,最早在1981年发表的“演变图形在几何教学中的直观效果和心理意义”中出现,变式教学分为概念变式与过程性变式两种类型。

可以大体分为基于学术与艺术等文化遗产、以系统化的学科为基础所构成的教材单元（学科单元）与以学习者的生活经验为基础所构成的经验单元（生活单元）。教材单元是作为学科框架内的模块式学习内容来组织的；经验单元是通过师生合作或者儿童自身经验活动的模块来计划与组织的。

相对于知识点分割独立的教学方式，单元教学更注重将知识点以学科逻辑线索串联，形成具有结构的认知系统，而其相互串联的逻辑系统又可以借鉴和引申到其他的单元内容的学习中去，这就使得过程性变式教学和单元设计能更契合地融汇到一起，从而帮助学习者在活动体验的过程中构建数学活动认知体系。

## 二、初中函数单元活动教学的情况分析

### 1.背景分析

基于单元设计的单元教学应注重学科内学科、活动、专题间的有机联系以及模块或主体间的有机联系，促进学生形成合理的认知结构。因此，为了让学生更系统地学习初中函数，在教学过程中应开展多元教学活动，从实际生活中引出函数的概念。当具体学完一个简单函数后，应及时归纳总结，让学生体会到函数的思想和方法，促使学生自主探究其它函数学习的过程。

### 2.对于函数单元学习基础的认知

“平面直角坐标系”是沪教版初中数学教材七年级下册第十五章第一节的内容。“数轴上的点与实数是一一对应的关系”这一部分的教材安排意图，是让学生猜想平面上的点与实数之间的关系。这虽然可以让学生快速掌握如何写出平面内点的坐标，但却忽视了学生从一维到二维转变过程中可能存在的认知困难，既不能让学生领悟引入有序实数对的必要性，也不能帮助学生理解平面内的点和有序实数对之间的一一对应关系。

## 三、教学设计体系构建与实践

### 1.函数单元的引入

函数单元的第一课时内容为直角坐标系的引入，该部分将学生对于数学代数式和方程的学习引入到了平面二维空间上，是解析几何的开端，也是函数单元的开篇，更是学习的前期铺垫。

## 课例 1：直角坐标系

### 【教学活动设计】

考虑学生已学习过数轴的相关知识，故以笛卡尔发明坐标系的故事为教学情境，并融入需要解决的数学问题。

师：这只苍蝇向右爬了 5cm，如何用数来表示它的位置？向左爬了 3cm，如何表示？

师：当这只苍蝇向上爬了 5cm，如何表示？

师：当这只苍蝇先向右爬 3cm，再向上爬 5cm，又该如何表示？

因为问题情境的引入，使得学生能直观的感受数学问题。教师的三个问题设计，能帮助学生从一维过渡到二维，引发认知冲突，并理解“实数对”表示平面内的点的意义所在。

## 课例 2：函数概念

### 【教学活动设计】

本班级三位男生 50 米赛跑的运动过程

问题 1：在赛跑过程中，涉及了哪些量，哪些是变量，哪些是常量？

问题 2：在 50 米赛跑过程中时间  $t$  和平均速度有着什么样的联系或规律吗？

问题 3：如果知道某个学生 50 米跑的平均速度，他的百米赛跑成绩时间唯一确定吗？

当教师引导学生运用函数概念解决来自生活中的实际问题，十分有利于实现学生知识结构的关联和整合。

### 2.首次学习过程活动的认知和对比

正比例函数是函数单元中的开篇，学生认识理解一个函数的方法与步骤由此展开，可以说这部分内容的学习是体验函数学习过程的样板，故而牵涉的教学顺序和呈现方式都要做到细致而明确。

## 课例 3：正比例函数

### 【教学活动设计】

#### 1.概念引入

(1) 某商店销售某种型号的水笔, 销售情况记录如下:

售出水笔数 (支)	2	5	4	3	10	15	...
营业额 (元)	5	12.5	10	7.5	25	37.5	...

问: 根据上述所给的条件, 你能得到什么信息?

(2) 每本练习本的厚度为 0.5 厘米, 一些练习本摞在一起的总厚度  $h$  (cm) 随这些练习本的本数  $n$  (本) 的变化而变化, 那么这两个变量之间的对应规律可以表示为\_\_\_\_\_。

(3) 一个正方形的周长随着边长的变化而变化。设正方形的边长为  $x$  ( $x > 0$ ), 周长为  $y$ , 那么  $y$  关于  $x$  的函数关系式为\_\_\_\_\_。

问: 观察这些函数关系式, 你能发现什么规律?

## 2. 变式训练

下列各题中的两个变量是否成正比例?

(1) 某复印社按复印 A4 纸 1 张收 0.4 元计费, 变量是复印纸张数  $x$  (张) 与费用  $y$  (元)。

(2) 正方形 ABCD 的边长为 6, P 是边 BC 上一点, 变量是 BP 的长  $x$  与  $\triangle ABP$  的面积  $S$ 。

(3) 圆的面积随半径变化而变化, 变量是圆的面积  $A$  与该圆半径  $r$ 。

(4) 从地面到高空 11 千米处, 高度每增加 1 千米, 气温就下降 6 摄氏度。某地的地面气温是  $25^{\circ}\text{C}$ , 在 11 千米以下的空中, 变量是空中某处离地面的高度  $h$  (千米) 和气温  $t$  ( $^{\circ}\text{C}$ )

反比例函数是可借鉴之前学习过程、开展迁移探究的较为简单的函数类型。学生充分利用正比例函数学习过程, 通过猜想→操作→观察→归纳(从特殊到一般、证明)→应用, 研习反比例函数。

### 课例 4: 反比例函数的图像与性质

#### 【教学活动设计】

#### 1. 复习引入

2. 绘制反比例函数  $y = \frac{4}{x}$

问题 1: 绘制函数  $y = \frac{4}{x}$  的图像时, 为什么曲线的每支是向两方伸展的? 那么反比例函数的图像是否会与坐标轴相交? 绘制反比例函数图像时应该注意些

什么？

3. 绘制反比例函数  $y = \frac{6}{x}$ 、 $y = -\frac{6}{x}$ 、 $y = -\frac{8}{x}$  和  $y = \frac{8}{x}$  的图像（分组）

问题 2：这几个图像分别位于哪几个象限？在每一象限内，随着图像上的点的横坐标  $x$  逐渐增大时，纵坐标  $y$  是怎样变化的？

### 3. 再次借鉴活动的体验

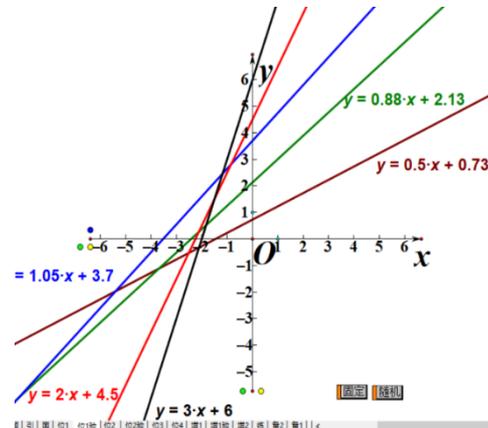
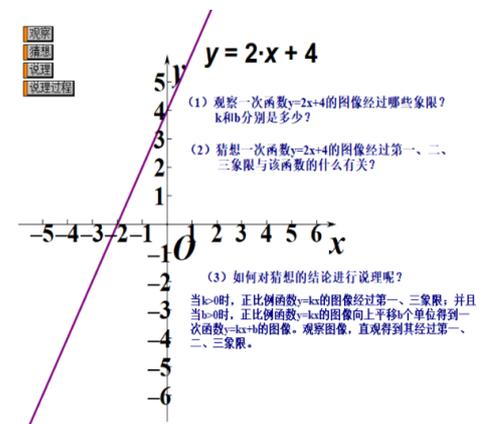
教师可以通过一次函数的教学设计，让学生在之前的学习体验过程中尝试选择更合适的演绎思路，促成其对对新知识的认识和理解。同时，深化学生对于类似方法的过程体验，帮助他们学会借鉴和迁移，形成更为深刻的理解。

利用学生已有的知识经验，引导学生进一步理解函数的意义，体会研究函数的方法，并使学生获得一次函数的基础知识。在探索直线  $y=kx+b$  在坐标平面内的位置特征与常数  $k$ 、 $b$  的符号之间关系的过程中，体会数形结合的数学思想，领会由特殊到一般的分析问题和解决问题的思维方法。

#### 课例 5：一次函数的图像与性质

##### 【教学活动设计】

- (1) 回顾上学期学习正、反比例函数图像性质的过程
- (2) 先画出这四个一次函数的图像；
- (3) 观察一次函数  $y=2x+4$  的图像经过哪些象限？ $k$  和  $b$  分别是多少？
- (4) 猜想一次函数  $y=2x+4$  的图像经过第一、二、三象限与该函数的什么有关？（正比例函数图像的位置与什么有关？）
- (5) 几何画板验证：随机显示  $K>0$ ，且  $b>0$  的一次函数图像（先固定，问  $kb$  特点，后随机）
- (6) 符合条件的直线有无数条，不可能穷尽。如何对猜想的结论进行说理？



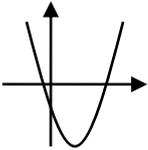
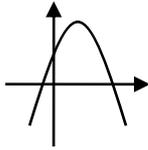
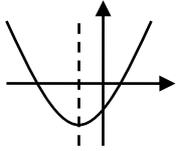
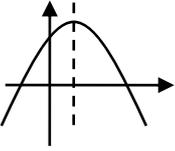
#### 4.前期形成思维方式的综合迁移

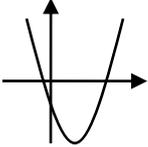
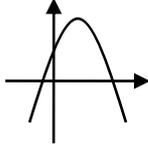
二次函数是初中阶段非常重要的函数模型，通过二次函数的学习，可以进一步加深学生对函数性质的理解，掌握研究函数的方法，体会函数思想。故此，本章的教学重点应着眼于理解与掌握二次函数图象与性质、绘制图象并能借助图象研究函数性质、解决相关问题。

在此单元教学设计中，可将二次函数内容作为之前过程性变式体验的综合展示，让学生在前期的一系列体验感悟中实现学科逻辑思维方式的综合性迁移和应用，无疑是贴合学科逻辑构建的一次高质量学习活动。

#### 课例 5：二次函数的图像与性质

##### 【教学活动设计】

解析式	一般式：_____	顶点式：_____
开口方向：	(a 确定)	
	 (1) _____	 (2) _____
对称轴：	(a、b 确定) 对称轴：直线_____	(m 确定) 对称轴：直线_____
	 (1) 左同	 (2) 右异
	对称轴在 y 轴_____边， a、b 符号_____。	对称轴在 y 轴_____边， a、b 符号_____。
顶点坐标：	(_____, _____) 顶点在 x 轴上：_____ = 0 顶点在 y 轴上：_____ = 0	(_____, _____) m：(左右平移) 左加右减 k：(上下平移) 上加下减

<p>最 值：</p>	<p style="text-align: center;"><b>(a 确定)</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div> <p>(1) <math>a &gt; 0</math>, 顶点为最____点, 此时当 <math>x = \underline{\hspace{2cm}}</math> 时, <math>y</math> 有最____值。</p> <p>(2) <math>a &lt; 0</math>, 顶点为最____点, 此时当 <math>x = \underline{\hspace{2cm}}</math> 时, <math>y</math> 有最____值。</p>
<p>增 减 性：</p>	<p style="text-align: center;"><b>(a 确定) ////</b></p> <p>(1) <math>a &gt; 0</math> 时, 对称轴____边, <math>y</math> 随 <math>x</math> 的增大而____ (即____)</p> <p style="padding-left: 100px;">对称轴____边, <math>y</math> 随 <math>x</math> 的增大而____ (即____)</p> <p>(2) <math>a &lt; 0</math> 时, 对称轴____边, <math>y</math> 随 <math>x</math> 的增大而____ (即____)</p> <p style="padding-left: 100px;">对称轴____边, <math>y</math> 随 <math>x</math> 的增大而____ (即____)</p>
<p>注：</p>	<p style="text-align: center;">一般式与顶点式可以互换：配方法</p>

#### 四、过程性变式引导下的单元教学设计实践反思

##### 1. 结构化构建与呈现

在函数单元教学设计中, 有着众多知识点, 而且大知识点套着小知识点, 大概念又套着小概念, 有着非常复杂的层级嵌套。对于初次学习的学生而言, 这样的复杂内容是需要教师仔细划分归类, 并体现在单元教学设计中。

首先是注重前期铺垫内容, 如直角坐标系的建立和函数基本概念的建立。其次梳理呈现各具体函数概念, 先以最简单的正比例函数为模板, 构建一个认识基本函数概念、性质、图像等要素的逻辑, 将相关知识点串联起来形成一个小体系。承接反比例函数的学习, 以加强和巩固对该体系的迁移和应用能力。第三, 要在一次函数的教学设计中, 合理布局存在差异的知识点, 提升学生借鉴方法的认识和理解。最后通过对二次函数的学习, 综合应用之前历经的方法, 构建一个更完整的函数认知系统。

##### 2. 借助图像研究函数性质, 以数解形、以形助数

学生在接触大量的具体实例后，可通过观察一次函数图像归纳基本性质。故此，在研究一次函数图像位置时，老师们需运用几何画板、实物投影等多媒体设备辅助教学，将多样的一次函数图像展现给学生观摩，为学生后续的归纳和验证奠定基础。在相关活动的环节设计中，老师应整合学习资源，给学生直观的体验的同时，引导学生理解由形到数、由数到形的转化。

### **3.数学课堂教学的本质是数学活动，数学活动的本质是思维活动**

设计有效的数学学习活动，需要教师正确认识直接经验和间接经验的关系，或依赖机械的模仿与记忆，或流于形式的实践探究、互动交流是无法体现课堂学习内容要求的。故此，教师应合理设计数学活动单元，紧紧把握思维活动这条主线，灵活贯通活动单元设置，注重数学思想方法和思维方式的融入，让更多的学生在数学活动中得到发展。

### **主要参考文献**

- [1]顾泠沅 杨玉东.过程性变式与数学课例研究[J].上海中学数学.2007(z1)
- [2]陈瑶.课堂观察研究指导[M].北京教育科学出版社，2002
- [3]崔允灏.课堂观察 20 问[M]. 当代教育科学出版社，2007
- [4]陆鹏程.基于学情分析的小学数学单元教学设计的研究[D]. 上海师范大学 2018
- [5]柴璇.初中数学“单元结构化”教学研究[D]. 陕西师范大学 2018
- [6]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准[M].北京师范大学出版社 2022