

# 基于“模型思想”的高中数学单元复习教学

## ——以“鳖臑模型”为载体的“空间直线与平面”单元复习为例

徐雯璐

(上海市南洋模范中学)

**摘要：**本文以沪教版高中数学“空间直线与平面”单元复习为例，探讨基于模型思想的立体几何单元复习教学实践，以“鳖臑”模型为载体，构建“文化溯源-模型解析-问题链设计”的教学框架。通过系统梳理模型中的空间垂直关系与空间角计算，完成知识的结构化重构。教学中融合 Geogebra 动态技术进行课堂的师生交互，突破想象难关，发展直观想象与逻辑推理素养；同时挖掘鳖臑模型的数学文化价值，增强学生的文化认同。实践表明，以模型思想统领单元复习，能提升知识整合效率，为核心素养的融合发展提供有效范式。

**关键词：**模型思想、单元复习、鳖臑

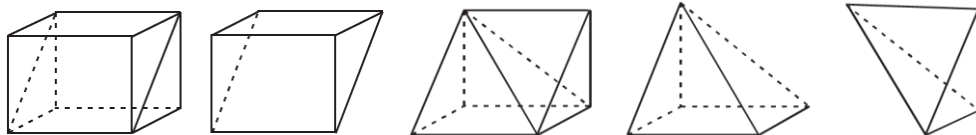
### 一、引言

新课标指出，数学教学应当注重学生核心素养的培养，强调数学文化的育人价值。立体几何作为高中数学课程的重要组成部分，不仅承载着发展学生空间观念、培养逻辑推理能力的关键任务，更是连接古典数学智慧与现代数学思想的桥梁。徐光启在评论《几何原本》时曾说过，“举世无一人不当学几何”。

然而，当前立体几何教学面临诸多挑战：首先，随着空间向量内容的引入，学生往往过度依赖坐标运算，忽视了空间想象能力的培养。其次，在单元复习环节，普遍存在知识点简单罗列、缺乏系统整合的现象，难以帮助学生构建完整的认知体系。更为关键的是，传统的教学方式未能充分挖掘立体几何蕴含的模型思想，导致学生难以将零散的知识点有机联系起来。这些问题严重制约了立体几何教育价值的实现，也不利于学生数学核心素养的全面发展。

### 二、基于“模型思想”的立体几何单元复习

“鳖臑”作为中国古代几何学的经典模型，最早系统记载于东汉时期（约公元 1 世纪）的数学典籍《九章算术·商功》篇。刘徽在公元 263 年所作的注文中明确注释：“邪解立方，得两堑堵，邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑，阳马居二，鳖臑居一，易之率也。合两鳖臑成一阳马，合三阳马而成一立方，故三而一。”



立方

堑堵

阳马

鳖臑

高中阶段的单元复习，绝不是知识的简单重复和再现，而是巩固和加深学生对已学知识的理解，使所学知识系统化、条理化. 而“鳖臑”模型具有三重独特价值：其一，作为最小完备的空间结构单元，能系统整合平行、垂直等核心位置关系；其二，其割补变换特性完美诠释“降维思想”，为单元知识结构化提供理想载体；其三，蕴含的传统文化智慧，为数学建模注入人文内涵.

基于此，本研究以沪教版必修第三册第十章“空间直线与平面”单元复习为例，以“鳖臑”模型为载体，探索基于模型思想的单元复习教学路径，构建“文化溯源-模型解析-问题链设计”的教学框架，帮助学生将零散知识转化为结构网络，将解题训练升华为思想方法，将单一的知识技能转化为核心素养发展的跃迁.

### 三、教学实践

#### 1、情境引入

带领学生挖掘生活中的“鳖臑”模型，梳理教材或习题中出现的“鳖臑”模型，借助数学史料介绍“鳖臑”形成的切割过程，并用 Geogebra 演示动画.

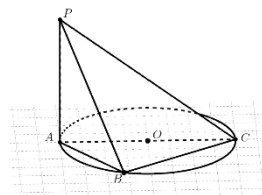
通过实例抽象模型，引出课题，说明学习该模型的必要性.

#### 2、模型判定

通过史料，引导学生从数学的角度给几何体下定义.

问题 1：若“侧棱垂直于底面且垂足在直角顶点”，还是所讨论的模型吗？

问题 2：若  $AC$  是圆的直径， $B$  是圆上的点， $PA \perp$  面  $ABC$ . 判断三棱锥  $P-ABC$  是否为“鳖臑”？



这个过程是对模型从直观到理性的认识，下定义的过程也是思辨的过程. 一般来说，可以从面的形状、直线与平面的关系入手刻画几何体的结构特点，这也是下一章《简单几何体》中定义几何体的基本方式.

#### 3、性质探究

为了解“鳖臑”模型的性质，设计了三个层次的探究，以“问题链”的方

式，采取步骤“直观感知→操作确认→推理论证→度量计算”，引导学生温故知新，形成系统的立体几何知识网络，提升空间观念.

### 探究 1：“鳖臑”模型中有哪些垂直关系？

问题 1-1：空间的直线与平面有哪几类垂直关系？

问题 1-2：在“鳖臑”模型中依次找出这些垂直关系，并证明.

在垂直关系的判断中，复习线线垂直、线面垂直和面面垂直的相互转化，培养学生逻辑推理能力. 借助 Geogebra 软件，协助学生完成直观感知与操作确认的环节. 同时，在问题中引导学生学会合理分类，不重不漏地梳理模型中的垂直关系，为后面空间角的度量打好基础.

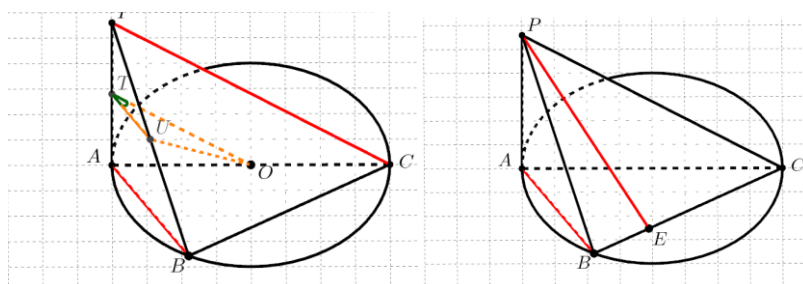
### 探究二：“鳖臑”模型中的空间角

本探究主要以学生互问互答的活动形式开展，教师邀请学生自由选择空间中的直线或平面，并计算空间角的大小.

(1) 异面直线所成角（如：异面直线  $AB$  与  $PC$  所成角）

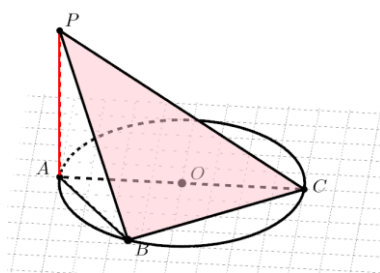
问题 2-1：“鳖臑”模型中有几对异面直线所成角？尝试作角并计算.

问题 2-2：设  $E$  为线段  $BC$  上一动点，求异面直线  $PE$  与  $AB$  所成角大小的取值范围.



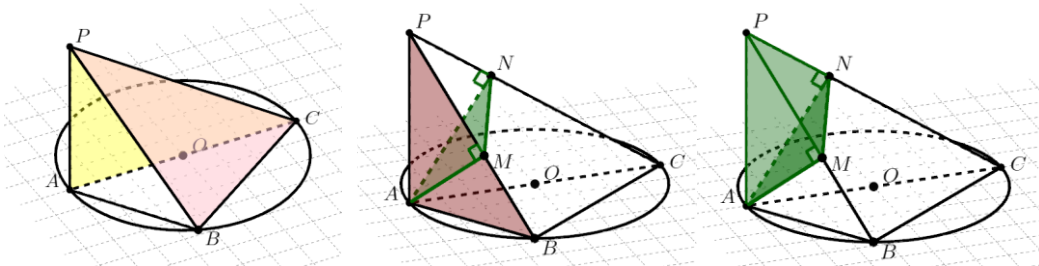
在复习异面直线所成角的过程中，掌握平移的基本解法. 在此基础上，进行变式训练，由静到动，由浅入深. 该变式是为了体现补形的重要方法，借助直棱柱或长方体，让线面关系更加清晰.

(2) 直线与平面所成角（如：  $PA$  与平面  $PBC$  所成角）



问题 2-1：总结求异面直线所成角、直线与平面所成角的基本方法有哪些？

(3) 二面角（如：二面角  $A-PC-B$ ）



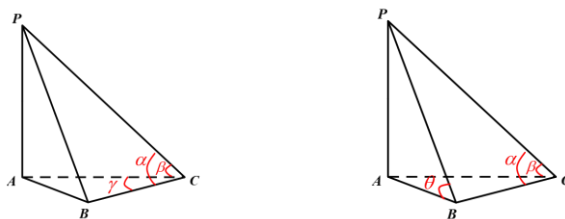
问题 3-1：总结求二面角的基本方法有哪些？

问题 3-2：若  $PA=2$ ,  $AC=2\sqrt{2}$ ,  $B$  是圆上一动点，若平面  $AMN$  与平面  $PAB$  所成的锐二面角为  $60^\circ$ ，求  $\angle BAC$  的大小.

在探究活动中，学生不断加深对“鳖臑”模型的体验与认知. 问题 3-2 可以让学生感受到，在许多立体几何问题中，都能找到“鳖臑”的身影. 若能在几何体中解构或者建构出鳖臑模型，就能让学生对几何体中直线与平面位置关系的处理更加熟悉，这种模型化的方法，也体现了划归的数学思想.

### 探究三：三个空间角间的关系

学生在直线与平面所成角以及二面角的概念学习中，已经通过最小角定理和最大角定理直观地了解了空间角定义的合理性与唯一性. 而三余弦定理和三正弦定理则揭示了三个空间角之间的内在联系与定量关系，是“鳖臑”模型的具体应用.



问题 1-1：分别计算  $\angle PCB=\alpha$ （线线角）、 $\angle PCA=\beta$ （线面角）、 $\angle ACB=\gamma$ （射影角）的余弦值，你能发现什么等量关系？

问题 1-2：仿照问题 1-1 的探究过程，分别计算  $\angle PCB=\alpha$ （线线角）、 $\angle PCA=\beta$ （线面角）、 $\angle PBA=\theta$ （二面角）的正弦值，你能发现什么等量关系？

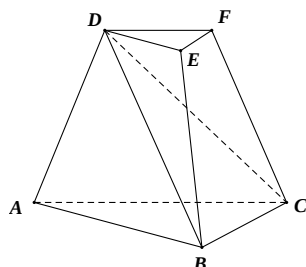
问题 1-3: 尝试运用所学的新知识, 尝试重新解决探究二中的问题 2-2?

通过合作探究, 温故知新, 培养学生创新意识. 三余弦定理和三正弦定理揭示了三个空间角的内部联系和统一, 给学生提供更多求解空间角的思路. 在旧题新解过程中, 加深对三个空间角的联系和认识.

#### 4、模型应用

通过巩固前面学习的内容, 通过在几何体中构造鳖臑模型来转化问题, 以此评价学生学习效果.

如图, 在三棱台  $ABC-DEF$  中, 平面  $ACFD \perp$  平面  $ABC$ ,  $\angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$ ,  $DC = 2BC$ . 求直线  $DF$  与平面  $DBC$  所成角的正弦值.



#### 四、教学反思

本次单元复习课以《九章算术》中的“鳖臑”模型为载体, 通过模型思想的创新应用, 对立体几何单元复习教学进行了有益的探索与实践. 从教学效果来看, 这种以传统文化模型贯穿单元知识结构的教学方式, 不仅有效提升了复习效率, 更在核心素养培养方面取得了显著成效.

##### 1. 模型思想引领下的单元知识重构

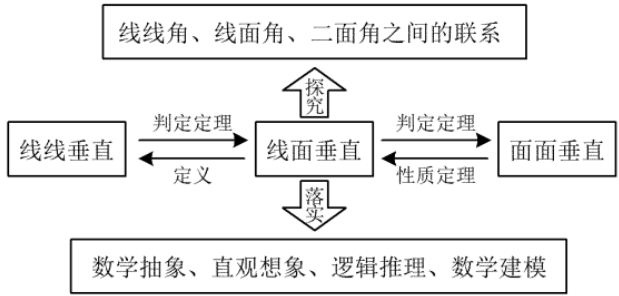
在传统复习模式中, 立体几何知识点往往以碎片化的方式呈现, 学生难以建立完整的认知体系. 本次教学创新性地采用“模型驱动”的复习策略, 以鳖臑这一典型几何体作为知识整合的枢纽. 通过“抽象模型——认识模型——性质探究——模型应用”, 层层递进, 对模型中的线面关系进行系统性探究, 使零散的知识点自然串联成有机整体, 感受研究空间位置关系的一般研究思路为“直观感知→操作确认→推理论证→度量计算”. 这种结构化复习更有助于理解知识间的内在联系.

##### 2. 核心素养的融合发展路径

从教材中的例题和习题抽象出鳖臑模型, 体现了模型思想, 鳖臑的判定的证明过程中有执果索因思想的体现, 开放性问题的设置以及切割与补形的统一

突出了转化与化归的思想，落实了数学抽象、直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养。

从单元层面看，通过对几何对象的研究方法及空间位置关系的研究思路的学习体会，学生能够提升认识和探索空间图形的能力。课堂中形成了本节课的知识网络和素养落实结构图。



### 3. 技术赋能的深度互动体验

不同于简单的静态展示，本节课利用 Geogebra 制作交互式课件，学生可以通过拖动画面操控鳖臑模型，从任意角度观察其结构特征，动态可视化有效降低了空间想象的认知负荷，突破了平面图形的局限，帮助学生建立准确的空间表象，发展直观想象的核心素养。在学生的互问互答环节，实现了真正的个性化学习，每位学生都可以按自己的认知节奏探索模型的性质，通过操作修正或验证自己的猜想，极大地提升了学生在课堂上的活跃程度和学习兴趣。

### 4. 文化浸润的育人价值实现

中华优秀传统文化走进高中数学课堂强调古为今用，提升学生数学学习的文化内涵，促进核心素养的综合发展。本节课将数学史教育自然融入知识教学，实现了文化育人与学科教学的有机统一。通过创设适合的教学问题情境，引入“鳖臑”模型，启发学生思考，引导学生把握数学内容的本质，体会古代数学家对人类的贡献。本节课还对我国古代数学名著《九章算术·商功》进行介绍，分析古建筑中的鳖臑元素。这不仅体现了古代数学家的成就，有利于增强学生的民族自豪感；另一方面，也体现了数学源于生活，使他们真切感受到数学的实用价值。

这种以模型思想为主线、以文化浸润为特色、以技术融合为支撑的单元复习教学模式，不仅能够帮助学生建立系统的知识结构，更能促进其数学思维方式的优化，为发展核心素养提供有效路径。