

《点关于直线对称的方法及应用》教学设计

上海市南洋中学 王莉

【摘要】

解析几何作为代数与几何融合的重要载体，点关于直线的对称问题是其核心题型之一，也是培养学生数学抽象、逻辑推理等核心素养的重要抓手. 本文结合高中数学教学实践，系统探究点关于特殊直线与一般直线的对称点求解方法，通过光线反射、距离最值两类典型应用场景展开实例分析，并基于教学实践反思优化教学路径，为解析几何中对称问题的教学提供理论与实践参考.

【关键词】

点关于直线对称 光线问题 距离最值 教学实践

一、教学背景分析：

学生特征分析：

作为一所市实验性示范性高中，授课班级的整体数学学习水平在年级处于中上水平，多数学生上课积极主动，思维活跃. 学生已经学习了直线的相关知识，但对于一些综合性应用性的问题研究，还需要教师积极引导.

教师特点分析：

笔者在教学中注重情境设置，激发学生的学习兴趣，提升课堂教学效能，积极引导学生思考，探求问题本质.

知识背景分析：

数学家格梅茵说：“代数不过是书写的几何，而几何不过是图形的代数.”^[1]而解析几何正是代数与几何的完美结合，是用代数的方法研究几何的典范. 直线是整个解析几何的基础，在已经综合学习了直线方程的基本形式、直线的倾斜角与斜率、两条直线的位置关系的内容之后，很有必要再就解析几何中的典型问题——“对称问题”进行系统深入的研究.

解析几何中的“对称问题”主要有两种基本类型：

(1) 中心对称：可化归为点关于点的对称，常运用中点坐标公式求解；

(2) 轴对称：可化归为点关于直线的对称，其充要条件是，“具有一对对称点的连线与对称轴垂直”以及“一对对称点的连线的中点在对称轴上”.

二、教学目标分析：

1. 理解解析几何中用代数方法解决图形对称的基本方法；

2. 在较复杂情境中抽象出图形对称问题，并运用基本方法解决问题；
3. 在问题解决中发展数学抽象、逻辑推理以及数量运算等核心素养.

三、重点难点分析：

1. 教学重点：利用垂直和平分的方法求点关于直线对称点坐标；
2. 教学难点：根据点关于直线对称解决光线问题和距离最值问题.

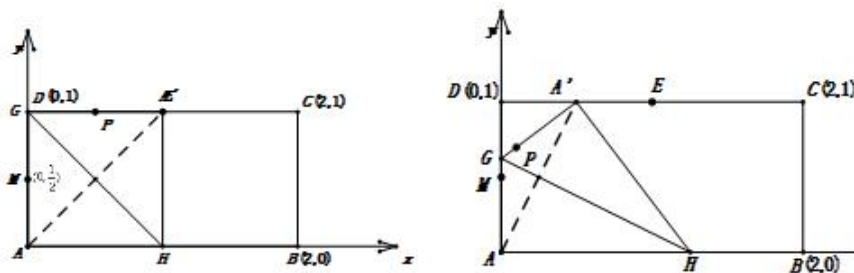
四、课堂结构设计：

环节 1. 创设情境，引入课题（几何画板）：

引例：在平面直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$ 的长为 2，宽为 1, AB 、 AD 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上， M 是 AD 的中点，点 A 与坐标原点重合，将矩形折叠，使点 A 落在线段 DC 上，点 M 与点 P 重合.

$Q1$ ：若折叠后，点 A 与 DC 边的中点 E 重合，求此时折痕所在直线方程及 P 点坐标.

$Q2$ ：若 AD 中点为 M ，折叠到点 A 与 DC 边的四等分点 A' 重合，此时点 M 与点 P 重合，求折痕所在直线方程及点 P 坐标.



【设计意图】将生活中常见的折纸问题作为引入，既新颖又足够引起学生的好奇心，激发学生动笔计算求解的欲望. 如图已经建立了直角坐标系，即点 $A(0,0)$, $E(1,1)$ ，要求折痕，即求两点的对称轴方程，利用：①一对对称点的连线与对称轴垂直；②一对对称点的连线的中点在对称轴上，可得 AE 中点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，直线 AE 的斜率为 1，则折痕所在直线的斜率为其负倒数，得折痕所在直线方程为 $x + y - 1 = 0$. 该题初步让学生体会点关于直线对称的两个要点，即两对称点的连线的中点在对称轴上，以及两对称点的连线与对称轴垂直，为下一题的展开铺设好桥梁. 对于问题 2，由于已知了折痕即对称轴方程，问题即转化为如何求点 $M(0, \frac{1}{2})$ 关于直线 $4x + 8y - 5 = 0$ 的对称点，即引入我们的新课——求点关于直线的对称点的方法探究. 对于更一般的情况，该如何求折痕，求对称点坐标，将在这节课做一研究.

环节 2. 问题探究，建构知识

1. 探求点关于特殊直线的对称

点 $P(x_0, y_0)$ 关于 x 轴对称点 $P_1(x_0, -y_0)$;

点 $P(x_0, y_0)$ 关于 y 轴对称点 $P_2(-x_0, y_0)$;

点 $P(x_0, y_0)$ 关于 $x=t$ 轴对称点 $P_3(2t-x_0, y_0)$;

点 $P(x_0, y_0)$ 关于 $y=t$ 轴对称点 $P_4(x_0, 2t-y_0)$;

点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y=x$ 轴对称点 $P_5(y_0, x_0)$;

点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y=-x$ 轴对称点 $P_6(-y_0, -x_0)$;

2. 探求点关于一般直线的对称

【例 1】点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $ax+by+c=0$ 的对称点 Q 坐标.

解法一: l_{PQ} 与 $ax+by+c=0$ 垂直, 设 $l_{PQ}: bx-ay+c'=0$, l_{PQ} 过点 $P(x_0, y_0)$, 则 l_{PQ} :

$$bx-ay-bx_0+ay_0=0, \text{ 联立方程组 } \begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx-ay-bx_0+ay_0=0 \end{cases},$$

可得: l_{PQ} 与 $ax+by+c=0$ 的交点坐标: $M(\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}, \frac{a^2y_0-abx_0-bc}{a^2+b^2})$, 其为 PQ 的

中点, 即可得 $Q(2x_M-x_0, 2y_M-y_0)$.

$$\text{解法二: 设 } Q(m, n), \text{ 联立方程组 } \begin{cases} \frac{y_0-n}{x_0-m} \cdot (-\frac{b}{a}) = -1 \\ a \cdot \frac{x_0+m}{2} + b \cdot \frac{y_0+n}{2} + c = 0 \end{cases}, \text{ 可求得 } Q \text{ 坐标.}$$

【设计意图】第一种解法中利用了直线的垂直系设法, 间接先求出交点即为中点, 再用中点公式求点 Q ; 第二种解法方程组直接求出点 Q , 两种解法本质相同, 意在对处理直线垂直的方法各有千秋, 以从直线垂直系的角度, 或是从 l_1 和 l_2 的斜率乘积为-1 的角度.

下面就点关于一类特殊的直线方程探求其对称点.

练习: 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称点 Q 坐标.

解法一: 设 $l_{PQ}: x+y+c=0$, l_{PQ} 过点 $P(x_0, y_0)$, 则 $l_{PQ}: x+y-x_0-y_0=0$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x-y+b=0 \\ x+y-x_0-y_0=0 \end{cases}, M(\frac{x_0+y_0-b}{2}, \frac{x_0+y_0+b}{2}), \text{ 即 } Q(y_0-b, x_0+b).$$

解法二：设 $Q(m,n)$ ，联立方程组
$$\begin{cases} \frac{y_0-n}{x_0-m} \cdot (-1) = -1 \\ \frac{x_0+m}{2} - \frac{y_0+n}{2} + b = 0 \end{cases}$$
，得 $Q(y_0-b, x_0+b)$ 。

【设计意图】当直线斜率为1时，因为倾斜角为 45° ，其对称点的坐标形式有其特殊表示，在今后的运算中其结论可以简化运算。当斜率为-1，类似有结论：点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = -x + b$ 的对称点 $Q(b - y_0, b - x_0)$ 。

环节 3. 巩固知识，实际应用

模块一：光线问题

【例 2】一光线从点 $A(2,3)$ 射出，遇到直线 $x + y + 1 = 0$ 反射，反射光经过点 $B(1,1)$ ，求：反射光所在直线的方程及光线从 A 点到 B 点所经过的路程。

【设计意图】由光线的物理特性，其入射角大小等于其反射角，联想到点关于直线对称，图像中出现等腰三角形的角平分线、中线、高三线合一，找到解题路径。 $A(2,3)$ 关于直线 $x + y + 1 = 0$ 的对称点为 $A'(-4, -3)$ ， $l_{A'B}$ ： $4x - 5y + 1 = 0$ 即为反射光线所在直线方程， $|A'B| = \sqrt{41}$ 即为光线从 A 点到 B 点所经过的路程。

变式：一光线从点 $A(-3,4)$ 射出，遇到 x 轴反射，反射光又遇到 y 轴再次进行反射且过点 $B(-2,6)$ ，求：反射光所在直线的方程。

【设计意图】受到上题的启发，作点关于镜面的对称点，则对称点在反射光所在直线上。本题出现两次反射，即找两个对称点，问题得解。 $A(-3,4)$ 关于 x 轴的对称点 $A'(-3, -4)$ ，点 $A'(-3, -4)$ 关于 y 轴的对称点 $A''(3, -4)$ ， $l_{A''B}$ ： $2x + y - 2 = 0$ 即为反射光线所在直线方程。

模块二：距离和的最小值与距离差的最大值问题

【例 3】已知点 $A(3,6)$ 与点 $B(4,0)$ ，在直线 $x + 2y - 10 = 0$ 上找一点 P ，使得 $|PA| + |PB|$ 最小。

【设计意图】首先利用有向距离判断两点与直线的位置关系：

$$\sigma_A \cdot \sigma_B = \frac{(3+12-10)}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(4+0-10)}{\sqrt{5}} < 0, \text{ 得两点位于直线的异侧, 再根据三角形的两边之和大于第三边, 要取到最小值, 必须点 } A、B、P \text{ 三点共线, 即点 } P \text{ 为 } l_{AB} \text{ 与 } x+2y-10=0 \text{ 的交点.}$$

联立方程组 $\begin{cases} x+2y-10=0 \\ 6x+y-24=0 \end{cases}$, 得 $P(\frac{38}{11}, \frac{36}{11})$. 此题的思考路径为下一题铺平了道路.

变式 1: 已知点 $A(1,2)$ 与点 $B(4,0)$, 在直线 $x+2y-10=0$ 上找一点 P , 使得 $|PA|+|PB|$ 最小.

【设计意图】首先利用有向距离判断两点与直线的位置关系:

$$\sigma_A \cdot \sigma_B = \frac{(1+4-10)}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(4+0-10)}{\sqrt{5}} > 0, \text{ 得两点位于直线的同侧. 此时若要取到和的最小值,}$$

需三点共线, 但是取不到, 联想到上题的背景, 若作点 A 关于直线 $x+2y-10=0$ 的对称点 A' , 利用两对称点到对称直线距离相等, 可以化归到同一问题, 即可得解. 不妨先求过 $A(1,2)$ 且与

$x+2y-10=0$ 垂直的直线方程: $2x-y=0$, 联立方程组 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y-10=0 \end{cases}$, 得点 A 与 A' 的中点

$M(2,4)$, 得 $A'(3,6)$, 以下同上例.

变式 2: 已知点 $A(1,2)$ 与点 $B(4,0)$, 在直线 $x+2y-10=0$ 上找一点 P , 使得 $||PA|-|PB||$ 最大.

【设计意图】两点位于直线的同侧, 要求距离差的最大值, 根据三角形的两边差小于第三边, 要取到最大值, 必须点 A 、 B 、 P 三点共线, 即点 P 为 l_{AB} 与 $x+2y-10=0$ 的交点. 联立

$$\text{方程组 } \begin{cases} x+2y-10=0 \\ 2x+3y-8=0 \end{cases}, \text{ 得 } P(-14,12).$$

变式 3: 已知点 $A(3,6)$ 与点 $B(4,0)$, 在直线 $x+2y-10=0$ 上找一点 P , 使得 $||PA|-|PB||$ 最大.

【设计意图】两点位于直线的异侧, 此时若要取到差的最大值, 需三点共线, 但是取不到, 联想到上题的背景, 若作点 A 关于直线 $x+2y-10=0$ 的对称点 A' , 利用两对称点到对称直线距离相等, 可以化归到同一问题, 即可得解.

环节 4. 课堂小结

1. 点关于直线对称的求法

2. 光线问题

3. 距离最值问题: 两点位于直线异侧, 可求距离和的最小值; 若在同侧, 利用对称; 两点位于直线同侧, 可求距离差的最大值; 若在异侧, 利用对称.

再次回顾引例：

在平面直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$ 长为 2，宽为 1， AB 、 AD 分别在 x 轴与 y 轴的正半轴上，点 A 与坐标原点 O 重合. 现将矩形折叠，使点 A 落在线段 DC 上.

Q3：若折痕所在的直线的斜率为常数 k ，试写出折痕所在的直线的方程，并求折痕长的最大值.

(答案： $y = kx + \frac{k^2 + 1}{2}, k \in [-2, 0]$ ；最大值 $2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$)

【设计意图】利用所学的知识解决实际问题，整堂课首尾呼应，让学生体会数学在实际生活中的应用.

五、教学反思

本节课的情境导入采用了折纸问题. 将生活中常见的折纸问题作为引入，既新颖又足够引起学生的好奇心，激发学生动笔计算求解的欲望. 该题初步让学生体会点关于直线对称的两个要点，即两对称点的连线的中点在对称轴上，以及两对称点的连线与对称轴垂直，为下一题的展开铺设好桥梁. 在解决完特殊位置的问题后，提出本节课主要解决的问题，就是点关于一般直线对称点坐标的求法.

对于点关于直线的对称点求法，主要分为两类，一类是点关于特殊直线对称点的求法，主要是利用图象，直接读出，但对于点关于一般直线对称点的求法，则要牢牢掌握垂直和平分两个关键点，同时需要学生掌握将文字信息转化为数学表达式，从而进一步体会解析几何的本质.

对于点关于直线对称点的应用，则主要体现在光线问题和距离最值问题. 对于光线问题，学生在初中物理中已经掌握基本原理，但现在要利用数学知识求其入射光线或反射光线，则必须利用对称，因为入射光线上的点关于镜面的对称点一定在反射光线上，而反射光线上的点关于镜面的对称点一定在入射光线上. 所以利用对称能帮助我们很快解决. 对于距离最值问题，则充分利用几何画板的优越性，让学生对于异侧距离和有最小值和同侧距离差有最大值有直观的感受，从而能在遇到两点在直线同侧求距离和最小值和两点在直线异侧求距离差最大值时利用对称进行化归.

整堂课力求结构清晰，重点明确，课件生动，能让学生对于对称问题有直观深入地认识，但笔者在一些细节的处理上还需更严谨，更灵活. 比如点关于斜率是 ± 1 的直线的对称点坐标，如果课堂上要讲清原理，则时间安排上没有条件，但直接告知结论又显得应试，较为突兀，

所以还需思考如何能更好地融入课堂，另外，为了保证课堂内容的完整性，在时间安排上还有待更合理化，学生互动的环节还需增强.

解析几何是高中数学的重点难点，让学生在教师的引导下能学会用代数的方法解决几何的问题，让学生能利用化归转化的思想解决很多生活中的数学问题，都是这节课想要提出的，希望学生们能真正认识数学，了解数学，也是数学教师一直努力的方向.