

呈现几何探究过程，构建知识内在关联，渗透数学核心素养

——以“直角三角形全等的判定”一课为例

上海市徐汇中学 朱元苑

摘要：以数学核心素养为导向，引导学生经历“实验—归纳—猜想—证明”的过程，探索直角三角形全等的特殊判定方法，感受一般和特殊之间的关系，构建知识内在关联。借助操作活动和分析证明思路，增强学生的几何直观和推理能力。

关键词：探究过程；知识关联；核心素养；几何直观；推理能力；全等判定

一、教学内容和内容解析

（一）教学内容

本节课的主要内容为：经历探索直角三角形全等的特殊判定方法的过程，归纳直角三角形全等的判定定理“ HL ”，并进行简单应用。

（二）内容解析

“直角三角形全等的判定”位于沪教版《数学》教材八年级第一学期“几何证明”章节。本课在学习了全等三角形的概念与性质、全等三角形的四种判定定理的基础上，聚焦特殊的直角三角形，进一步探究学习。

本章是论证几何学习的入门，从直观几何、实验几何推进到论证几何。在论证几何阶段，演绎推理是几何研究的主要方法。但学生初步学习演绎推理，需要控制证明的难度，重视证明前的分析和证明后的反思，引导学生学会数学思考的方式和养成严密思维的习惯，提升推理能力。

几何直观对逻辑思维有启导作用，实验操作对探索证明思路有重要意义，本节课对直角三角形全等的判定定理“ HL ”命题的探讨，展现“实验—归纳—猜想—证明”的完整过程，并在证明前的分析中有实验操作活动，把演绎与非演绎适当结合。

（三）教学目标

- 1.探索直角三角形全等的特殊判定方法，经历“实验—归纳—猜想—证明”过程，感受一般和特殊之间的关系，体会演绎思想和化归思想，发展几何直观和推理能力。
- 2.掌握直角三角形全等的判定定理，会用“ HL ”判定直角三角形全等。
- 3.经历探索定理的过程及合作交流，进一步激发探究的兴趣和积极性，增强解决问题的自信心。

教学重点：掌握两个直角三角形全等的判定方法及其应用。

（四）学情分析

学生通过实验几何的学习，获得了必要的几何基础知识，得到了几何语言表达的训练和形式化说理的体验，为进入论证几何的学习准备了条件。学生已掌握给定三角形的元素，通过尺规作图画三角形的能力，掌握全等三角形的四种判定方法，并能用于解决问题，这些为学习直角三角形全等的判定奠定了知识基础。

学生通过七年级三角形章节的阅读材料，初步了解“边，边，角”不能判定三角形全等，而“ HL ”判定定理是特殊直角三角形背景下能判定全等的情况，辨析一般与特殊之间的关联，对学生而言有一定的难度。另外“ HL ”判定定理的证明无法直接运用已学全等三角形的判定方法，而是需要通过两个三角形拼接后证明，这一证明方式学生较难想到，存在一定的困难。

教学难点：“ HL ”判定定理证明思路。

（五）教学策略

1.核心素养为导向

《义务教育数学课程标准（2022年版）》指出课程目标以学生发展为本，以核心素养为

导向,强调进一步使学生获得数学基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验的获得与发展,发展运用数学知识方法与发现、提出、分析和解决问题的能力,形成正确的情感、态度和价值观.

本课时通过“分离要素,聚焦研究对象——尺规作图,提出合理猜想——发现命题,完善语言表达——操作实践,尝试推理论证”发展学生的几何直观和推理能力,提升学生的数学核心素养.

2.内容结构化整合

对内容进行结构化整合,符合学生的认知规律,有助于学生理解与掌握,发展核心素养.

为了突破本课时的教学难点,即“ $H.L.$ ”判定定理证明思路的形成,需要挖掘新知与旧知之间的关联,明确知识的来源,结构与关联,构建探究的基本框架.因而类比已学全等三角形判定定理的学习过程,同样从一个三角形切入,再聚焦两个三角形的全等关系,如图1所示,使学生经历“实验—归纳—猜想—证明”的探究过程,感受一般和特殊之间的关系.

探究过程

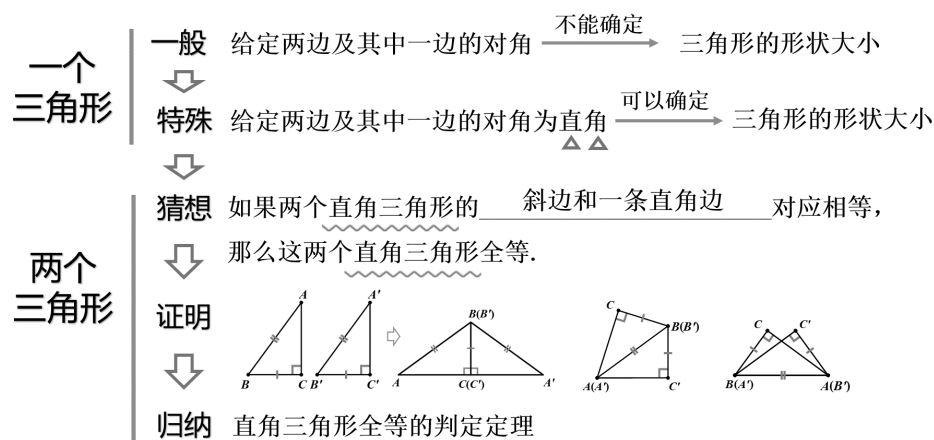


图1

3.组织启发式活动

学生是学习的主体,通过独立思考、动手实践、自主探索、合作教学等方式,引导学生主动学习.通过启发式的教学,激发学生学习兴趣,引发学生积极思考.

本课时活动一,引导学生在实际情境中发现问题和提出问题,同时能引导学生主动调用已学知识思考,通过发现矛盾引发探究.活动二,通过尺规作图的动手操作,观察并提出猜想,引发进一步探究.活动三,在尝试证明命题的过程中,借助实物纸片以小组合作的形式进行探究,逐步发现和完善证明思路.在这些活动的过程中以学生为主体,教师作为学习的组织者、引导者和合作者,重视数学结果的形成过程,关注数学内容直观的表述,有意识形成学生的直接经验.

二、教学活动设计与意图

(一)抽象数学问题,开放思考角度

问题:老师家里有一块如图2所示的直角三角形玻璃不小心弄破了,想到店里重新配一块.需要知道这个三角形的哪些元素,才能配到一块一模一样的玻璃呢?

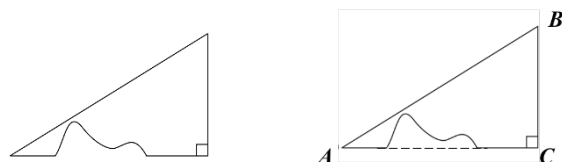


图 2

图 3

设计意图：借助实际问题情境，引导学生用数学的眼光观察世界，从实际情境中抽象数学问题，提升学生的数学核心素养.转化为数学问题“如图 3，需要知道三角形的哪些边角元素，能确定这个三角形的形状大小？”这一较为开放的问题，帮助学生调用已有知识，已知三角形的“两角及其夹边”或“两角及其中一角的对边”或“两边及其夹角”或“三边”都可以确定三角形的形状大小.

思考 1：能否选择确定 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的大小，来确定 $\triangle ABC$ ？

思考 2：能否选择确定 AB 和 BC 的大小，来确定 $\triangle ABC$ ？

设计意图：通过思考 1 引导学生复习，已知三角形的三个角无法确定三角形的大小，只能确定形状.思考 2 则帮助学生回忆，一般三角形中，确定三角形的两边及其中一边的对角，不一定能确定三角形的形状大小.为后续引入特殊直角三角形的情况作铺垫.

思考 3：实际问题中，边 AC 破损，无法确定大小，同时不具备测角仪或其他合适的工具确定 $\angle A$ 或 $\angle B$ 的大小，那么还能否解决这一问题呢？

设计意图：回归实际问题，同过实际操作的限制，一方面让学生体会实际问题和抽象后的数学问题不完全一致，需要考虑真实情况带来的局限，同时激发学生的好奇，并进一步思考，开展后续探究，即给定一个三角形的两边及其中一边的对角，该角为直角，能否确定三角形的形状大小？

(二) 从一般到特殊，构建知识关联

问题：给定一个三角形的两边及其中一边的对角，能否确定三角形的形状大小？如何说明？

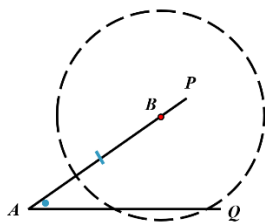


图 4

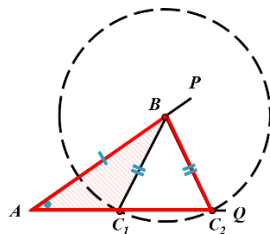


图 5

设计意图：引导学生尝试用已学知识，利用作图说明，再借助尺规作图动态演示（作图过程由图 4 到图 5），说明这类情况下无法确定三角形的形状大小，如图 5 所示，可能会作出两个三角形的不同情况.

思考 1：所作 $\odot B$ 与射线 AQ 一定有两个交点吗？什么情况下能确定三角形？

设计意图：思考 1 引导学生发现 $\odot B$ 与射线 AQ 也可能只有一个交点或没有交点.若只有一个交点，则能确定 $\triangle ABC$ 的形状大小.学生再次作图探究，在此基础上，通过动态变化呈现（由图 5 变化为图 6），引导学生进一步观察，当点 C_1 与点 C_2 重合时，三角形确定，聚焦此时出现的直角三角形这一特殊情况.此外，如图 7，当 $BC > BA$ 时，呈现的钝角 $\triangle ABC$ 的形状大小也唯一确定.这一作图过程在复习旧知的同时，能帮助学生体会本节课的新知与已学知识的关联.

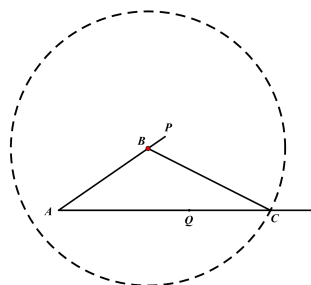
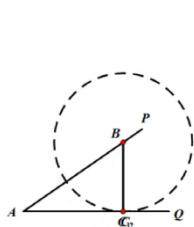


图 6

图 7

思考 2: 配玻璃的实际问题中, 已知的元素有什么特殊情况?

设计意图: 通过思考 2 关注配玻璃的实际问题中, 已知角为直角, 联系图 6, 引发学生思考: 给定一个三角形的两边及其中一边的对角为直角, 能否确定三角形的形状大小? 如表 1 所示, 从一般到特殊开展探究, 构建知识之间的关联.

	给定三角形的元素	能否确定三角形的形状大小?
一般	两边及其中一边的对角	不能确定, 有多种可能
↓		
特殊	两边及其中一边的对角为直角	?

表 1

(三) 借助尺规作图, 提出合理猜想

作图: 画 $\text{Rt}\triangle ABC$, 使 $\angle ACB=90^\circ$, $BC=2\text{cm}$, $AB=3\text{cm}$.

思考 1: 这个三角形的哪些元素已知?

思考 2: 可能画出几个满足条件的三角形?

设计意图: 画草图, 借助思考 1 和思考 2, 发现给定的是三角形的两边及其中一边的对角, 学生会有所困惑, 不确定画出三角形的情况. 再通过尺规作图的动手操作, 以及文字表述画图的具体过程, 发现三角形形状大小的唯一确定. 在此基础上通过同学之间画出三角形的对比 (如图 8), 引导学生关注两个三角形之间的关系, 引发猜想: 满足条件的两个三角形可能全等.

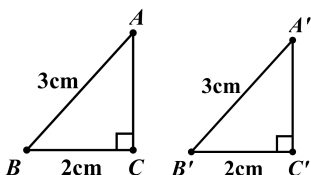


图 8

思考 3: 一般情况下 $S.S.A$ 能判定两个三角形全等吗? 这里有什么值得我们关注的条件?

设计意图: 聚焦两个三角形的全等判定, 调用已学知识, 引发冲突. 一般情况下 $S.S.A$ 不能判定两个三角形全等, 与现有猜想似乎有些矛盾, 借此让学生更加关注目前的具体条件, 明确直角这一特殊条件. 对直角三角形背景加深关注, 引导学生主动尝试用文字语言表述命题, 为后续证明作铺垫, 同时避免与一般情况下 $S.S.A$ 混淆.

(四) 小组合作讨论, 充分探究思考

1. 分析条件结论, 明晰证明方向

猜想: 如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等, 那么这两个直角三角形全等.

证明: 已知: 如图 9, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 中, $\angle C=\angle C'=90^\circ$, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$.

求证: $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle A'B'C'$.

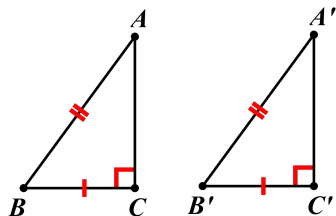


图 9

思考 1: 已有的三组元素对应相等, 能否直接运用已学的全等三角形判定定理?

思考 2: 需要证明哪些元素对应相等, 才能解决这一问题?

设计意图：在明确文字命题之后，给学生时间，结合图形用符号语言描述已知和求证，并初步尝试寻找证明思路.但学生思考证明思路时出现困难，所以通过思考 1 思考 2 帮助学生理清思路，明确证明的方向：①证明一组角等 $\angle A = \angle A'$ 或 $\angle B = \angle B'$ ，或②证明另一组边等，即 $AC = A'C'$.

思考 3：有哪些方法可以证明角或边的等量关系？

设计意图：再通过思考 3 引导学生在积累的知识中挖掘可用来证明边等或角等的方法，从而进一步思考需要发现需要改变边或角的位置关系.比如想证明 $\angle A = \angle A'$ 相等，观察图形中 $\angle A$ 和 $\angle A'$ 在两个三角形中，常用全等三角形证明，但这是最终需要证明，不适用.如果想利用等边对等角证明 $\angle A = \angle A'$ ，则需要改变两个角的位置关系，将它们集中在一个三角形中，通过这样的分析，引导学生逐步明晰证明方向.

2.动手操作活动，探寻证明思路

小组讨论：利用手中的三角形纸片，尝试寻找证明思路.

设计意图：通过三角形纸片，可以帮助学生开拓证明思路，将分散在两个三角形中的条件在一起，同时将需要证明的量进行位置关系上的调整，以便于运用已学知识证明其相等关系.

学生思路：通过将两个三角形的一边叠合，组成新的三角形或四边形，尝试寻找证明思路. (学生利用磁吸纸片，在黑板上展示三角形纸片的拼接方式，如图 10—15)

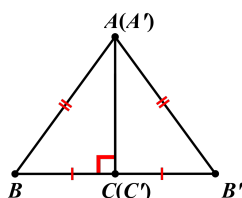


图 10

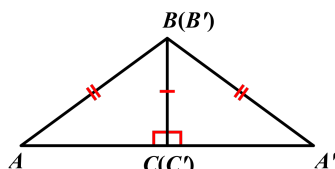


图 11

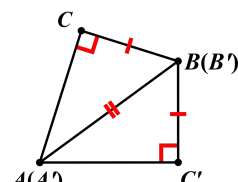


图 12

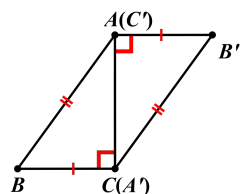


图 13

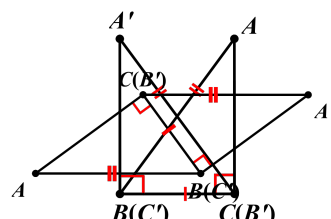


图 14

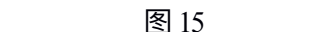


图 15

思考 1：为什么想到将两个三角形拼接为图 10、图 11 的形式？这两种拼接方法是否都可行？

思考 2：还有哪几种拼接方法不可行？为什么？

设计意图：绝大部分学生开始考虑的方式都是图 10 和图 11，希望将两个直角三角形通过拼接转化为一个等腰三角形，从而利用等腰三角形的性质，但却忽略了拼接操作的可行性.通过思考 1 引导学生有意识关注线段拼接时需要注意长度相等，从而主动发现缺少条件 $AC = A'C'$ 的情况下，图 10 不可行，也为后续证明时，需要优先说明拼接方式成立做铺垫.同样的思考 2 引导学生继续辨析，排除图 13 的拼接方式.

思考 3：利用图 11 和图 12 的拼接方式，可以证明 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle A'B'C'$ ，这样的拼接方式起到什么作用？

设计意图：在图 11 和图 12 的拼接情况下，学生利用已学知识，能快速找证明思路，而思考 3 则是在证明完成之后，引导学生反思，拼接操作给证明起到的作用.经历证明过程，感受通过拼接能将条件集中在一起，重新整合，如图 11 中可以利用等边对等角证得 $\angle A =$

$\angle A'$, 同样图 12 中可以利用角平分线定理的逆定理证得 $\angle CAB = \angle C'A'B'$, 从而证明 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle A'B'C'$. 反之, 以现有知识, 图 14 和图 15 的拼接方法无法支撑证明.

3. 观察不同方法, 形成有序思考

思考 1: 同学们提出的多种拼接方法, 哪些方法有共同点?

设计意图: 学生在寻找思路的过程中, 尝试拼接三角形纸片的方式是较为随机的, 通过观察大家想到的不同拼接方法, 学生会发现图 11、图 14 和图 15 都是利用条件 $BC = B'C'$ 进行拼接, 图 12 则是利用条件 $AB = A'B'$ 进行拼接, 进而引导学生思考时有序分类.

思考 2: 利用条件 $AB = A'B'$, 还有其他的拼接方法吗?

设计意图: 引导学生发现利用条件 $AB = A'B'$, 还可以有不同的拼接方法 (如图 16、图 17), 一部分学生较难想到图 17 的拼接方式, 引导从运动变化视角观察, 用纸片直观操作, 可将图 16 中的 $\triangle A'B'C'$ 沿 $A'B'$ 翻折, 得图 17. 从动态变化视角展示, 更便于学生理解, 开拓思维.

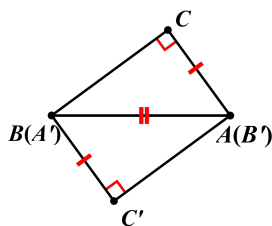


图 16

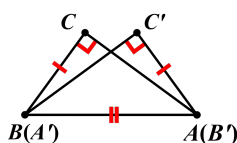


图 17

(五) 回顾探究过程, 共同归纳梳理

直角三角形全等的判定定理

文字语言: 如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等, 那么这两个直角三角形全等. (简记为“HL”)

图形语言:

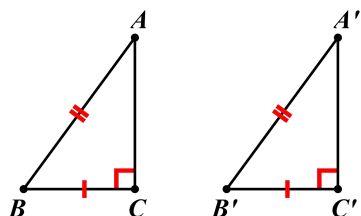


图 18

符号语言:

如图 18, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 中,

$$\text{若} \begin{cases} AB = A'B', \\ BC = B'C'. \end{cases}$$

则 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle A'B'C'$.

设计意图: 学生经历完整的探究过程, 并用文字语言、图形语言和符号语言表达直角三角形的判定定理, 着重强调定理须在直角三角形背景下运用.

(六) 剖析图形条件, 逆结论寻思路

例 1 已知: 如图 19, $BC \perp AD, BC' \perp AE$, 垂足分别为点 $C, C', AC = AC'$.

求证: 点 B 在 $\angle DAE$ 的平分线上.

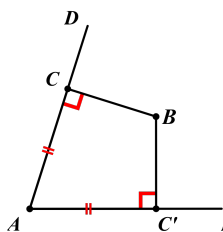


图 19

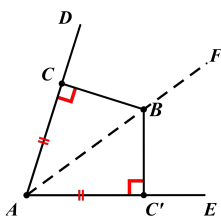


图 20

设计意图: 直接巩固应用, 熟悉新定理, 通过联结 AB (如图 20), 发现 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 都是直角三角形, 且满足公共斜边和一组直角边对应相等, 利用 HL 证明这两个三角形全等,

得 $\angle CAB = \angle C'AB$, 证得点 B 在 $\angle DAE$ 的平分线上, 此外注重学生正确的书写表达.

例 2 已知: 如图 21, $BC > AB, AD = DC, BD$ 平分 $\angle ABC$. 求证: $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

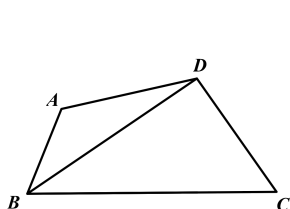


图 21

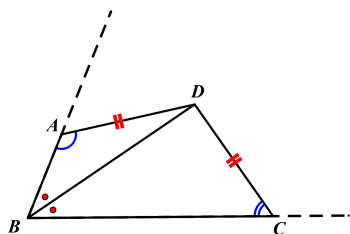


图 22

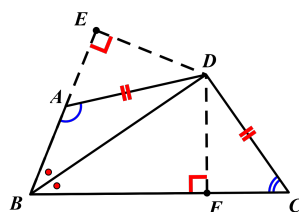


图 23

思考 1: 寻找这一问题的思路, 可以从哪里切入?

思考 2: 须证明 $\angle A + \angle C = 180^\circ$, 有哪些方法可以证明两个角互补?

设计意图: 在初步理清条件和结论后, 通过思考 1 引导思考解决问题的切入点, 可以看到通过条件联想较为困难, 从而关注结论 $\angle A + \angle C = 180^\circ$. 借助思考 2 学生能快速联想到邻补角、三角形内角和、平行线间的同旁内角互补等相关知识, 从而考虑利用邻补角, 转化为证明角相等的问题 (如图 22).

思考 3: 观察图形中角之间的位置关系, 如何证明?

设计意图: 通过思考 3 引导学生观察, 根据角分散的位置关系, 尝试利用全等证明角等, 结合角平分线条件, 如图 23, 通过过点 D 作 BA 和 BF 的垂线, 交线段 BA 的延长线于点 E , 交线段 BC 于点 F , 通过角平分线性定理得 $ED = FD$, 从而利用 $H.L$ 证明构造的 $Rt\triangle ADE$ 与 $Rt\triangle BDF$ 全等, 所得对应角 $\angle EAD = \angle C$, 即可证得 $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

(七) 关联已学内容, 形成知识体系

思考 1: 今天学习的 $H.L$ 适用于证明哪一类三角形全等?

思考 2: 证明两个直角三角形的全等方法只有 $H.L$ 吗?

直角三角形全等的判定

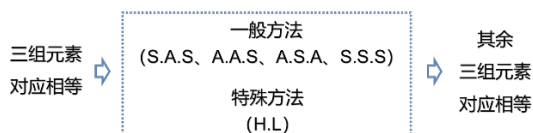


图 24

设计意图: 通过思考 1 和思考 2, 帮助学生梳理今天所学知识和旧知的关联, $H.L$ 只适用于证明两个直角三角形全等, 但已学习的其他全等证明方法也同样适用于特殊的直角三角形, 并且都需要通过三组元素对应相等来证明全等, 形成图 24, 便于学生构建知识关联.

四、课堂教学设计与反思

(一) 利用图形操作活动, 渗透几何直观能力

几何直观主要是指运用图表描述和分析问题的意识与习惯. 有助于把握问题的本质, 明晰思维的路径. 尺规作图、折纸、剪拼等操作活动, 可以帮助学生经历几何对象的图形构造过程, 理解图形的组成元素、关系与结构, 培养几何直观.

是建立几何直观的基础.

1、尺规作图直观感知, 发现图形结构特征

本节课利用尺规作图, 一方面帮助学生加深“边、边、角”不能确定三角形的形状大小的认知, 同时通过动态变化, 利用可视化技术帮助学生直观感受图形的变化, 从而引发学生直观猜想. 另一方面, 利用尺规作图, 在直角三角形确定“斜边、直角边”的情况下, 画出确定的三角形, 与“边、边、角”不能确定三角形形成矛盾冲突, 进一步引发猜想, 聚焦直角三角形

全等的特殊方法.学生经历两次尺规作图的操作过程,对图形进行直观感受,增强对于直角三角形全等“ HL ”判定定理特殊性的理解,明确直角三角形这一前提条件,并与已学知识构建关联.

2、纸片拼接操作活动,关注图形运动变换

在“ HL ”判定定理的证明过程中,实物三角形纸片操作讨论活动,能调动所有学生积极参与,培养学生对论证几何的学习兴趣.同时能帮助学生更直观、形象地感受通过图形地运动变换,将两个三角形的边角元素位置变化,重新组合元素条件,运用定理解决问题.活动后期引导学生关注操作活动中图形的变化,从翻折、旋转运动角度切入,从几何变换的视角观察与分析几何图形,通过操作活动对三角形进行变换、分解与组合,解释操作过程的几何原理及操作前后图形的关系,培养学生的几何直观.

(二) 探讨分析证明思路,培养逻辑推理能力

推理能力主要是指从一些事实和命题出发,依据规则推出其他命题或结论的能力.推理能力有助于逐步养成重论据、合乎逻辑的思维习惯,形成实事求是的科学态度与理性精神.

几何论证有很强的思辨性和逻辑性,本课时着重关注对证明思路的形成过程的分析,以及证明之后的反思梳理,培养学生的推理能力.

1、重视思路形成来源,凸显思考分析过程

重视证明前的分析,本课时多用“执果索因”的分析方法,即从“未知”看“需知”靠拢“已知”,通过细致剖析其中的因果关系,呈现思路的来源及思考过程,引导学生学会思考方法,以便延伸到其他问题的解决中.

在“ HL ”定理的探究过程中,给与学生充分的时间,探索思考证明命题思路,不急于给予提示,让学生说说遇到的困难,通过提问点拨,从结论入手,分析图形,从而主动提出“拼一拼”,在这一过程中更多通过生生互动,学生能更沉浸分析思考过程,体会思路的来源.

另外重视规范证明的表达,如利用图 11 的拼接方式证明时,在已说明 BC 和 $B'C'$ 重合后,引导学生关注还需通过 $\angle ACB = \angle AC'B' = 90^\circ$ 说明点 A' 、 C 、 A' 必在一条直线上,得 $\triangle ABB'$,后续用等腰三角形的性质才有依据.

在例 2 证明思路的探索过程中,同样引导学生通过结果切入,执果索因,学生通过 180° 联想邻补角之后,会出现两种不同的添线路径,延长 BA (如图 23) 可以通过构造出的全等三角形解决问题,而延长 BC 则无法用类似方法解决.此时引导学生思考原因,不难发现,能否有效结合角平分线这一条件,是非常重要的,感受添加辅助线时也需观察图形中已知的条件结构构成,尝试将其整合集中.此外也让学生体会,思路大方向正确的情况下,也不是所有路径都可以成功,探索思路时遇到困难是很正常的,重新聚焦条件和图形关系进行调整.

2、提升证明反思意识,梳理不同思路选择

在完成“ HL ”定理的证明后,引导学生回顾整个探究过程,尝试归纳梳理不同的拼接方式,鼓励学生多表达,形成有序思考路径.能发现拼接操作需要关注①可以利用相等线段进行叠合,注意操作的可行性②等长的两条线段叠合,两个图形也有多种拼接方式,可以从运动变换的视角,逐一考虑 (如图 25 所示) ③思考图形变换后能否通过位置变换,运用已学知识解决问题.

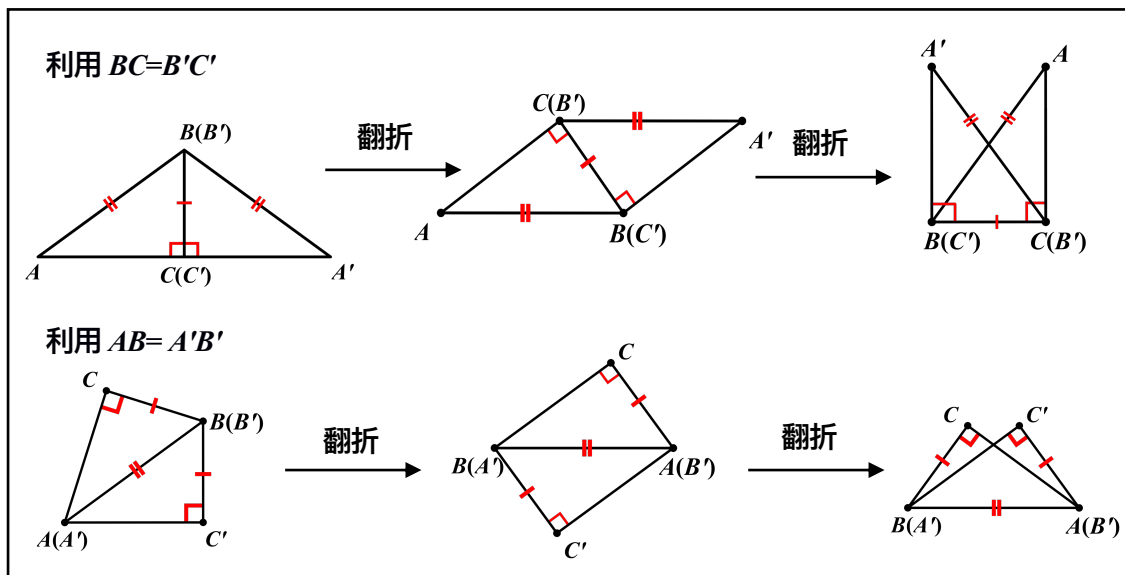


图 25

例 2 也有同学提出了不同的解题方法, 如图 26, 添加辅助线: 在线段 BC 上找一点 M , 使得 $BM=AB$, 联结 DM , 从而证明 $\triangle ABD \cong \triangle MBD$. 结合已知 $AD=DC$, 可证 $DM=DC$, 发现等腰 $\triangle DMC$, 可证 $\angle C = \angle DMC$. 再利用全等三角形的性质得 $\angle A = \angle DMB$, 最后利用 $\angle DMC + \angle DMB = 180^\circ$, 证得 $\angle A + \angle C = 180^\circ$. 在完成解答的基础上, 引导学生思考两种证明方法的关联, 可发现虽然添线方式不同, 但都是从 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 这一结论突破难点, 结合图形, 利用邻补角互补的数量关系, 将证明目标转化为证明角等. 通过证明后对不同方法的归纳梳理, 提升反思意识, 培养推理能力.

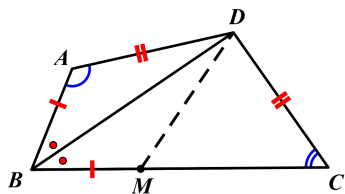


图 26

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准 (2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 鲍建生, 章建跃. 数学核心素养在初中阶段的主要表现之五: 推理能力[J]. 中国数学教育, 2022, (19): 3-11.
- [3] 鲍建生, 章建跃. 数学核心素养在初中阶段的主要表现之三: 几何直观[J]. 中国数学教育, 2022, (Z3): 3-9.