

基于培养学生数学建模素养的教学实践

罗修文¹

【摘要】《普通高中数学课程标准（2017 年版）》将数学建模作为数学学科六大学科核心素养之一，体现了对数学建模的重视，也将其与传统的解应用题相区分。在实践中，我们应注意对比二者的联系与区别，在适当保有解应用题教学中的经验的基础上，从培养学生数学建模素养的角度下进行教学。本文以作者在 2019–2020 学年中的两个教学片段为例，分享作者基于培养学生数学建模素养的教学实践。

【关键词】数学建模、数学学科核心素养、教学实践

在总结 21 世纪以来我国普通高中课程改革的宝贵经验的基础上，教育部与 2017 年发布《普通高中数学课程标准（2017 年版）》^[1]（以下简称《2017 课标》），并于 2020 年进行了修订。除了表面上的，教学内容与 2003 版普通高中课程方案和课程标准实验稿不同外，更深层次的变化是：对三维目标（知识与技能、过程与方法、情感态度价值观）进行了整合，提出了数学学科核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析。其中，数学建模无疑是让师生们感到最熟悉而又陌生的一个核心素养。

我们说对“数学建模”熟悉，是因为我们在教学中历来重视数学知识与方法在生活中的运用。从小学起，我们就开始接受做应用题的训练，对在给定的背景下运用诸如方程、函数、不等式等知识解决问题的过程十分熟悉。甚至在上海高考卷中，通常会在解答题中设置一个大题来考察学生的数学建模能力。在全国卷中，一般会在客观题中设置一个小问，而在解答题中的应用题近年来多于概率与统计相关联。

然而，我们又确实对“数学建模”这一核心素养感到陌生。大多数学生接触数学建模开始于大学的学习，部分理工科专业有开设《数学模型》课程，也有部分同学参加全国大学生数学建模竞赛（由中国工业与应用数学学会主办）。极少数高中生也会参与中学生应用数学知识竞赛（北京、上海等地）或美国高中生数

¹ 罗修文，四川资阳人，上海市上海中学，数学一级教师。

学建模竞赛。这说明数学建模竞赛中所需的知识储备、方法储备、能力储备对大部分中学生来说，是超出了他们的学习能力的。

因此我们容易发觉《2017 课标》中界定的数学建模的数学学科核心素养与传统的解应用题不同，与用于竞赛的数学建模也不尽相同。

传统的应用题一般是一个封闭的系统^[2]：问题是已经给定的，已知条件恰好能够推出所求答案，答案也是唯一的。《2017 课标》中的数学建模应包含：发现问题、提出问题，分析问题、构建模型，确定参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终解决实际问题等五个步骤。其中最困难也是最值得我们注意的是发现问题、提出问题。在分析传统应用题的过程中，我们常常先看问题，借助于问题将已知条件联系起来，可能对其中某些细节并不完全明白也不会影响解出正确的答案。但是一旦失去了问题，我们就很难将已知条件联系起来，甚至连是否有条件冗余或者缺失，某些数据的测量是否存在误差而导致矛盾都很难判定。

我曾观摩了一节数学建模课程，并移植于自己的课堂。材料的背景是已知上海某一段海岸线是沿着北偏东 45 度的一段直线段，在海岸线上 A 处的灯塔正东方向距离 60 海里处生成了一个台风，台风正沿着北偏西 60 度的方向移动。促使我移植这堂课的原因在于，这段材料是没有问题的，甚至无法判断其中的条件是否冗余或者缺失。我们最大的难点不在于求解，而在于提问。授课的对象是由高一高二混合在一起的二十名学生。我们要求学生每 4 人为一个小组，分别提出一个问题，并提出求解方案。不出意外地，高二同学并不能在整个过程中占有优势。学生们普遍在一开始感到无所适从，然而在当有人提出诸如台风什么时候登陆、是否影响灯塔等问题后，高二同学们的优势开始显示出来。高一同学会选用解三角形的方法，计算出台风登陆的位置等临界情形并作出判断，高二的部分同学会采用建立平面直角坐标系，计算台风眼的轨迹，运用不等式的知识求解。在第二个问题的求解过程中，学生发现题目中缺失了条件，例如台风眼的运动速度、台风半径等，进而借助于问题去寻求已知条件。在课程的后半段时间中，学生开始打开思路，提出一些问题，并反推我们需要测量哪些数据作为已知条件。

分析对比这节课与传统的解应用题训练，我们发现，发现问题、提出问题是传统的解应用题训练所缺失的一个重要步骤，这样的能力也不会随着我们对学科

知识的深入掌握或知识面的拓宽而自然地增强，也就是，我们不能要求在不经过任何训练的情况下，高二学生就比高一学生更会提出问题。因此，在实践《2017 课标》过程中，要落实培养学生数学建模的数学学科核心素养，我们首先需要从训练学生从生活中发现问题、提出问题开始。

《2017 课标》对数学建模这一数学学科核心素养的培育要求分布于必修课程、选择性必修课程及选修课程（B 类、C 类）中，教学难度及要求上层层递进。对于面向高考的大部分中学生来说，需要达到水平二：“能够选择合适的数学模型表达所要解决的数学问题”^[3]。学生们可以在教材中的数学建模活动或数学探究活动中选取材料，经历选题、开题、做题、结题四个环节，体会数学建模的过程。相比与传统的解应用题的训练，《2017 课标》对培养学生数学建模的数学学科核心素养更着重于培养学生主动运用所学知识，探索并解决具体问题的能力，包括敢于怀疑，发现问题、提出问题的精神。然而即便学生在数学建模方面的能力达到了可以作为大学自主招生的水平三：能够在现实世界中发现問題，运用数学建模的一般方法和相关知识，创造性地建立数学模型，解决问题，学生也难以应对数学建模竞赛难度的问题。

我们在教学中应注意避免刻意拔高教学目标，以期大部分学生通过学习后能具备参加数学建模相关竞赛的能力。如前所述，即便达到了《2017 课标》所要求的水平三的要求，学生也仅了解了一些典型的经济数学模型（如存款贷款模型、投入产出模型等）和社会数学模型（如等级评价模型、人口增长模型等），很难在具体的生产生活实际问题中类比嵌套，加以运用。以 2019 年上海市中学生数学建模活动的题目为例（完整题目见附）：“头痛是常见的病症，临床症状表现不同，轻重程度也不同。某机构想开发一种简易咨询系统，可以根据使用者情况的不同，最终对使用者给出下面三种建议中的一种：‘不必就医’或‘继续观察’或‘马上就医’。设想你团队接受了开发该系统的设计任务，要求你们提供完整而具体的设计方案。”学生需要先对头痛病症的发作机制、表征等背景信息做资料收集，结合收集的相关医学论文中的数据确定各项可调研项目在是否立即就医的指标中所占比重。其中的数学模型是线性的还是非线性的，数据的来源是可靠的还是需要剔除问题数据的，如何检查模型的准确性和效率等问题都不是可以通

过数学建模的课程的训练解决的。这样的数学建模体验，仅适合部分学有余力，知识储备广泛的学生参与。因此我们在设计数学建模课程中应设立合适的教学目标和难度，以适应大部分学生的学习能力。

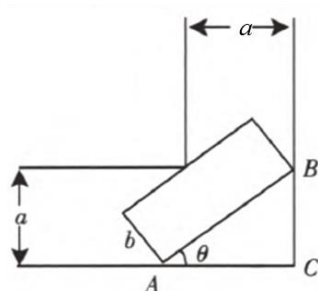
下面以一堂高三函数复习课为例，展示如何设置合适的教学难度以培养学生数学建模的数学学科核心素养。

背景问题^[4]：1966 年，数学家莫泽就提出了沙发问题：在单位宽度的走廊中，可围绕直角移动的最大面积的平面形状是什么？显然，单位正方形可以轻松达到要求，此时我们把单位正方形的面积 1 称为沙发系数。那么问题就是怎样提高沙发系数。如果我们设计一个半径为 1 的半圆形沙发，那么沙发系数就被提高至 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ 。经过 Hammersley、Gerver 等数学家的不懈努力，这个沙发系数被提高至约 2.2195。

这样的问题甚至已经到了微分几何等数学分支的研究前沿了，自然是不适合高中生进一步研究的。但其中包含的建立简化模型，分析求解，检验改进的过程却是培养学生数学建模的数学学科核心素养不可多得的素材。

学生容易提出下面这样的简化模型：

模型一：如图为一条直角走廊，其走廊宽为 a 米，矩形沙发的宽为 $b(0 < b < a)$ 米。求其最大长度，使其能顺利通过直角走廊。

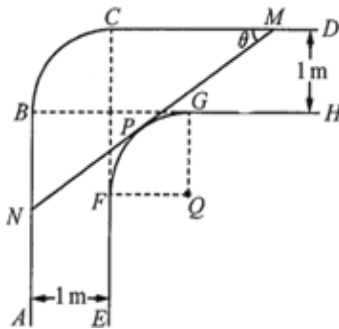


尽管这个模型中沙发的形状比较简单，然而这个模型的求解，对一些同学来说仍然存在困难：顺利通过走廊需要满足的条件是什么，也就是我们需要怎样的数学关系式来描述“顺利通过”，这是不少同学的困扰。用数学建模的方法解决实际生产生活中的问题，首先要运用数学的语言来描述这些问题，转化为我们可以求解的不等式、方程、函数等数学问题。目前的模型中实际问题如何转化成数

学的问题仍然不够明晰，沙发的长度要满足怎样的关系并不显然，因此我们还需要进一步简化。

在老师的引导下，学生又提出如下简化模型：

模型二：走廊拐角处的横截面如图所示，已知内壁 FG 和外壁 BC 都是半径为 1 m 的四分之一圆弧， AB 、 DC 分别与圆弧 BC 相切与 B 、 C 两点， $EF \parallel AB$ ， $GH \parallel CD$ 且两组平行墙壁间的走廊宽度都是 1 m 。若一根水平放置的木棒能通过该走廊拐角处，求木棒长度的最大值。



在这个简化模型中，二维的矩形沙发被进一步简化成了一维的木棒沙发（只有长度，没有粗细），问题就清晰地描述为：对木棒所处的任一位置（可用 $\angle CMN = \theta$ 来表示），木棒长 MN 具有一个最大取值（设为 $f(\theta)$ ），我们只需确定木棒在所有位置的最大取值中的最小值（即 $f(\theta)$ 的最小值）即可，这样的长度能保证木棒顺利通过任何一个位置。

有了模型二的求解分析过程，学生们容易利用平面几何知识类比解决模型一的问题：只需先表达出任一位置（用沙发与墙面所成角 $\angle BAC = \theta$ 来描述）处沙发长的最大取值 $AB = f(\theta)$ ，再利用函数的知识求解 $f(\theta)$ 的最小值。这样的最小值作为沙发的长，恰为沙发能通过直角走廊时的最大长度，从而也使沙发的面积达到最大。一个有趣的事实是，进一步讨论 b 的取值，使沙发面积达到最大值，我们发现这样得到的沙发系数竟然是 1，并不比正方形沙发直接水平移动来得更好。因此我们知道，为了进一步提高沙发系数，改变沙发的形状势在必行。然而沙发形状如何设计，已经超出了中学生应该掌握的程度，更深入的讨论应当留给学有余力的同学在课后进行。

通过这样一堂课，我们既让学生体验了从实际情境，到提出问题、建立模型、

求解模型、改进模型等建模过程，也达成了复习函数的综合性质的教学目标。实际上，抛去对沙发问题研究历史的背景介绍，以及引导学生简化模型的过程不看，这节课与传统的解应用题的设计并无差异。然而正是这一点点差异，就体现出课程的重点不仅是运用函数的知识解决问题，更是从实际问题中抽象出数学问题，建立数学模型并加以解决。学生的反映也超出了我们的意料，按一般的数学建模过程，我们总是先建立一个最简单的模型，然后添加上一些限制条件或复杂的因素，使之更接近真实的案例。然而什么样的模型是最简单的，是适合我们求解的，往往不是一目了然的，需要我们一步一步地简化至能够把控的难易程度。按照最初的设计，我们希望学生首先提出模型二并解决后，再在模型的检验与反思过程中，提出模型一。然而学生给出的顺序或许是更自然的一个探索结果，我们并不能一开始就确定哪些因素是可以忽略或简化的，或者说哪些因素不利于我们把实际问题抽象为易于解决的数学问题。

关于如何培养学生数学建模素养，我们都是探索者，其中一个问题就是如何将这样的培养与传统的解应用题的培养区别开来。我们认为二者既有联系，也有区别：大可以将经典的应用题进行改编作为载体，用于数学建模素养的培养；也要注意数学建模素养的培养更侧重于培养学生发现问题、提出问题的能力。

附：2019 年上海市中学生数学建模活动赛题

头痛病症简易咨询系统设计

1.背景

头痛是常见的病症，临床症状表现不同，轻重程度也不同。某机构想开发一种简易咨询系统，可以根据使用者情况的不同，最终对使用者给出下面三种建议中的一种：“不必就医”或“继续观察”或“马上就医”。

设想你团队接受了开发该系统的设计任务，要求你们提供完整而具体的设计方案。

2.任务描述

对于任何一种疾病，既不能掉以轻心拖延而致难以医治，也不能过分担忧而过度治疗。该系统要防止这类极端情况出现，旨在帮助使用者作出初步的合理决断。要求你们提供建构该系统的总体思想，并从数据的采集、系统内部的数学模型的

建立、判断和给出建议方法等诸方面对你们设计的系统给予具体而详尽的阐述。

- 1) 系统应适用多种人群；
- 2) 对使用者可以用提问而得到使用者的信息。设计的问题应尽可能简单，例如问题可采用是非题或选择题的形式；可以采用其他形式获得你们所需要的信息，但采用的方式对使用者来说应该是方便的；
- 3) 建立数学模型时必须详细说明如何把获得的信息变成模型所需要的数据；
- 4) 建立尽可能详细的数学模型并对模型的运作、使用加以说明；
- 5) 说明检验你们所建立的数学模型的方法和改进的方法；
- 6) 对后继工作、扩展系统的应用等诸方面提出合理可行的设想和建议；
- 7) 给机构负责人写一封一页（A4）的信，清晰地汇报你们团队构建该系统的思想和实施步骤。

【参考文献】

-
- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017年版 2020年修订）[S]. 北京：人民教育出版社，2020.
 - [2] 张维忠，徐佩雯. 高中数学新教材中的数学建模[J]. 浙江师范大学学报，2020(3):349-354.
 - [3] 沐方华、洪雨沛. 给予数学建模素养评价的试题分类框架研究[J]. 中学数学教学，2020(2):1-3,28.
 - [4] 数模君. 数学界再出变态神人？竟用一个比基尼方程，暴力吊打美国数学家？看完我惊了……[OL]. 2019-3-15.
https://mp.weixin.qq.com/s/ePDmOFi_bmKOXEsg3tvfwg.