情境与问题设计引领下的数学核心素养例析

南洋中学　黄荔梅

2018 年 1 月 16 日上午，教育部召开新闻发布会，宣布历时 4 年的普通高中新课程方案和各学科等学科课程标准修改工作已全部完成，经国家教材委员会审查通过，于 2017 年底印发，并将于 2018 年秋季开始执行。相对于 2003 年印发的普通高中课程方案和课程标准实验稿，课程标准对十余年普通高中课程改革实验进行系统梳理，总结提炼并继承已有经验和成功做法，以确保课程改革的连续性。

修订后的课程标准中指出了数学学科六大核心素养即“数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析”，并且概述了关于数学素养的分类表现，如下表所示：

核心素养	表现
数学抽象	形成数学概念和规则
	形成数学命题与模型
	形成数学方法与思想
	形成数学结构与体系
逻辑推理	发现和提出命题
	掌握推理的基本形式
	探索和表述论证的过程
	构建命题体系
	交流探索
直观想象	利用图形描述数学问题
	利用图形理解数学问题
	利用图形探索和解决数学问题
	构建数学问题直观模型
数学建模	发现和提出问题
	建立模型
	求解模型
	检验结果和完善模型
数学运算	理解运算对象

	掌握运算法则
	探索运算思路
	设计运算程式
数据分析	数据获取
	数据分析
	知识构建

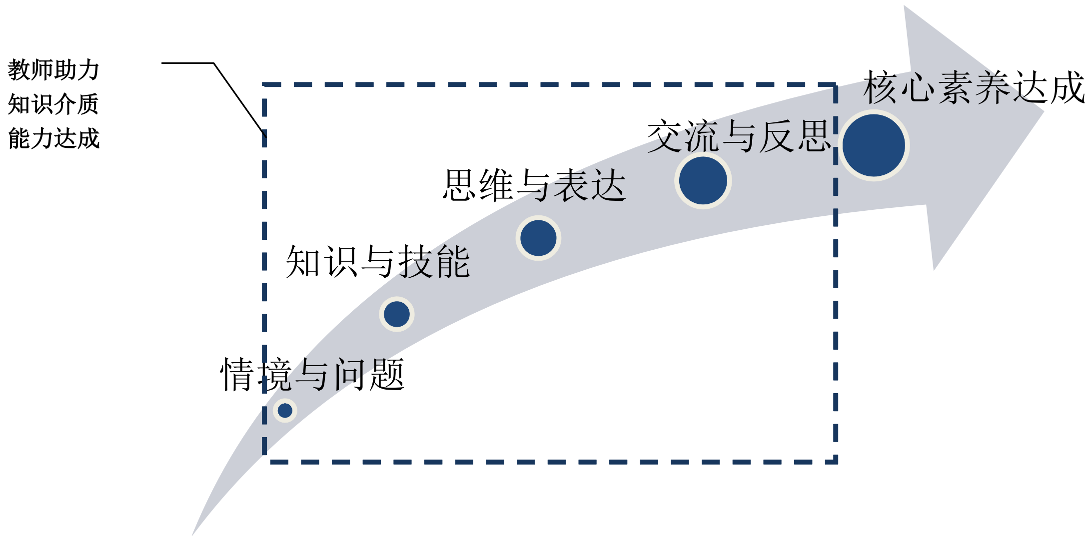
于此，从“双基”到“三维目标”再到“核心素养”， 长期从事一线的数学教师回顾教学历程，日益体会到素养导向的教学本质就是以学生发展为本的教学。但是一直以数学概念教学、习题教学的数学教师也提出质疑：“知识获得，甚至更直接一些——数学解题能力”与“核心素养”内驱关联如何把握？”；“通过高中数学课程的学习，学生能获得进一步学习以及未来发展所必需的教学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验（简称‘四基’）；提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力（简称‘四能’）”如何达成？ 核心素养如何评价, 如何体现……

也就是说，核心素养的落实在日常教学上、体现在每一次课堂中、渗透在每一题讲解中如何预设生成？

因此，新版课程标准界定了“学业质量水平”概念：学业质量是学生在完成本学科课程学习后的学业成就表现。数学学科学业质量是应该达成的数学学科核心素养的目标，是数学学科核心素养水平与课程内容的有机结合。每一个数学学科核心素养划分分为三个水平，每个水平是通过数学学科核心素养的具体表现和体现数学学科核心素养的四个方面进行表述，如下表：

情境与问题	现实情境、数学情境、科学情境，问题是指在情境中提出的数学问题
知识与技能	指能够帮助学生形成相应数学学科核心素养的知识与技能
思维与表达	指教学活动过程中反映的思维品质、表述的严谨性和准确性
交流与反思	指能够用数学语言直观地解释和交流数学的概念、结论、应用和思想方法，并能进行评价、总结与拓展

可以发现，教师在助力学生形成素养显性体现的基础架构为：“情境创设和问题设计”引领下的目标养成。当教师能够通过情境和问题的设计启发学生思考后, 其“知识技能”，“思维表达”，“交流反思”便能一蹴而就。如此循环往复，让教师的问题情境设计的“教学链”促使学生日益养成的“思维链”，形成日后收益终身的学生核



心素养。

由此，我们可以得出“情境创设和问题设计”是教师促进发展数学核心素养的基点，同时更要明确以下两个观点：

观点一：数学情境不能简单地认为是现实情境，同时还有“数学情境、科学情境、前序知识情境……”，因此情境可以定义为一切能够引发学生思考以及后续教学活动的前设问题；

观点二：数学素养在特定的、情境化的、综合性的数学活动中形成与发展、表现与评价；数学素养之间有较高的相关性和不可分割性，因此围绕着核心素养的达成目标，需要有全方位的考虑维度。

笔者以数学教学中解析几何为例，甚至落实在一道“圆锥曲线”的常规习题上，将日积月累的教学经验，教学方法，教学资料结合新课程标准，结合数学核心素养的培养目标，结合学业质量水平进行思考，定位，提升对于新课程标准的理解，探索提炼知识层面基础上的“核心素养”立意。

【问题设计】：已知动点 A 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-3}=1\left(a>0\right)$ 上，F_1,F_2 分别为椭圆的左、右焦点.

(1)若存在点 A，使 $AF_1\perp AF_2$，求正实数 a 的取值范围；

(2)若 $a=2$，动点 B 满足 $|BF_1|+|BF_2|=4$，且 $AO\perp OB$（O 为坐标原点），求△AOB 的面积的最大值和最小值.

【情境设计】：回归教材，教材是课程标准联系学生、联系教学的基本“传媒”，是学生和

教师参考学科本质的基本“标准 ”。因此从教材上预设的各类数学情境、科学情境、知识情境应该是后续学科教学的根本。

2008 版的上海高中数学教材 P55,12.4 椭圆的性质（2）

已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，椭圆上的动点 P 的坐标为 $\left(x_p, y_p\right)$，且 $\angle F_1PF_2$ 为钝角.

求 x_p 的取值范围.

解法:利用向量的数量积 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}}{\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\bullet\left|\overrightarrow{PF_2}\right|}<0$，并结合 $\frac{x_p^2}{9}+\frac{y_p^2}{4}=1$，建立关于 x_p 的不等式进行求解.

另解：易得椭圆的焦点为 $F_1\left(-\sqrt{5},0\right), F_2\left(\sqrt{5},0\right)$，通过建立以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=5$，它与 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于 P_1, P_2（在 x 轴上方），由此椭圆上的点可分为在圆上，在圆内和在圆外三类得出 $\angle F_1PF_2$ 的钝角情况。

【知识提炼】：该问题中涵盖知识点有：椭圆概念；椭圆方程；直线方程；两直线位置的位置关系。

【能力目标】：该问题需要学生跟据几何问题和图形的特点,用代数语言把几何问题转化成为代数问题;根据对几何问题(图形) 的分析,探索解决问题的思路;运用代数方法得到结论;给出代数结论合理的几何解释,解决几何问题;

【思维表达】：“写”和“说”的所有思维表达的方式，而思维的完整性、准确性、逻辑性甚至批判性就是取决于语言的精准度和形象度。当然，因为很多评价方式是书面形式，因此，教师更习惯于将解题过程呈现在学生面前，同时也希望能学习解题过程的思维表达。当然，在问题的逐渐推入中，可以通过问答形式形成“生生交流”和“师生交流”。

以下解题过程按照“核心素养”目标进行模块解析：

模块一：

解：由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-3}=1\left(a>0\right)$ 知 $a>\sqrt{3}$，要存在点 A 使 $AF_1\perp AF_2$，则以 O 为圆心，

$OF_1=\sqrt{3}$ 为半径的圆与椭圆有公共点由故 $\sqrt{3}\geq\sqrt{a^2-3}$，

所以 a 的取值范围是 $\sqrt{3}<a<\sqrt{6}$

综上所述：答案为$\sqrt{3}<a<\sqrt{6}$

【阶段评价】

- 能够在熟悉的情境中，直接抽象出数学概念和规则——椭圆标准方程的特征；
- 能够用归纳或类比方法，发现数量与图形的性质、数量关系——利用教材情境中提供的椭圆和圆的关系解决问题；从目标测试利益上而言，圆锥曲线往往与函数、向量、立体几何、不等式等知识相结合，知识容量大、也能体现学生的分析能力。

【核心素养】

- 数学抽象，数学运算，直观想象

模块二：

（2）当$a=2$时，由条件知A,B两点均在椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上，且$AO\perp OB$

【阶段评价】：

- 能够抽象出实物的几何图形，建立简单图形与实物之间的联系，体会图形与图形、图形与数量的关系——学生能够通过轨迹的识别形成椭圆及其方程的实质。

【核心素养】：

- 数学抽象

模块三：

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),OA$的斜率为$k\left(k\neq 0\right)$

则OA的方程为$y=kx$，OB的方程为$y=-\frac{1}{k}x$

解方程组$\begin{cases} y=kx \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得${x_1}^2=\frac{4}{1+4k^2},{y_1}^2=\frac{4k^2}{1+4k^2}$，

【阶段评价】：

- 能够在熟悉的数学情境中，解释数学概念和规则的含义，了解数学命题的条件与结论之间的逻辑关系，抽象出数学问题——利用两直线之间的垂直关系的斜率方法解决；

【核心素养】

- 数学抽象，逻辑推理，数学运算

模块四：

同理可求得 $x_2{}^2=\dfrac{4k^2}{1+4k^2}, y_2{}^2=\dfrac{4}{1+4k^2}$，

【阶段评价】：

- 能够通过熟悉的例子理解归纳推理、类比推理和演绎推理的基本形式——类比形式；
- 能够借助图形的性质和变换（平移、对称、旋转）发现数学规律——垂直的斜率“负倒数”关系可以类比运用；

【核心素养】

- 逻辑推理，直观想象、数据分析

模块五:

$\therefore\triangle AOB$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=2\sqrt{\dfrac{\left(1+k^2\right)^2}{\left(1+4k^2\right)\left(k^2+4\right)}}$

令 $1+k^2=t\left(t>1\right)$，则 $S=2\sqrt{\dfrac{t^2}{4t^2+9t-9}}=2\sqrt{\dfrac{1}{-\dfrac{9}{t^2}+\dfrac{9}{t}+4}}$

令 $g\left(t\right)=-\dfrac{9}{t^2}+\dfrac{9}{t}+4=-9\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}\left(t>1\right)$，所以 $4<g\left(t\right)\le\dfrac{25}{4}$，即 $\dfrac{4}{5}\le S<1$

【阶段评价】：

- 能够了解运算法则及其适用范围，正确运算——解决该类问题一般需要通过数形结合或利用函数方程的思想构建函数或不等式加以解决. 由于涉及的知识面广，题目多变，且解题过程计算量大，在化简就最值过程中，利用了换元、二次函数化归、复合函数单调性等，培养了学生联想、化归、抽象等数学思想方法。

【核心素养】

- 数学抽象、逻辑推理、数学运算、数据分析

模块六：

当OA与坐标轴重合时$S=1$，于是$\frac{4}{5}\le S<1$，$\triangle AOB$面积的最大值和最小值分别为1和$\frac{4}{5}$

综上所述：答案为1和$\frac{4}{5}$。

【阶段评价】：

- 能够理解用数学语言表达的概念、规则、推理和论证，理解相关概念、命题、定理之间的逻辑关系，提炼出解决一类问题的数学方法，理解其中的数学思想，初步建立网状的知识结构；能够用图形探索解决问题的思路，形成数形结合的思想——与圆锥曲线有关的最值和取值范围问题，实质是探求运动变化中的特殊值或临界值，能够利用运算结果回归图形本身，提出合理的解释。

【核心素养】

- 数学抽象、直观想象、数据分析

通过以圆锥曲线为主要载体，与平面向量、数列、不等式、平面几何等知识进行综合，结合数学思想方法，考查学生的数学思维能力及创新能力。由此可见，知识是教学活动得以展开的一个“阿基米德点”，教学活动离不开知识，教学活动对知识具有绝对的依赖性，没有了知识，教学活动便成为无源之水、无本之木。教学无法在真空中产生也无法脱离知识而单独存在。

而数学教学活动更离不开解题，但是以“育人”为最终目的教师必须明确：解题不是数学学习的全部，正如人的发展更不限于掌握知识，教学的根本目的和人的发展的核心内涵是人的素养的提升，也即，教学是基于知识，通过知识的学习来提升人的素养的一种教育活动。

落实在数学教学上具体解释为：反映数学素养的思维品质只能通过其外显的解题行为得以表现，因此，尽管测试的重点是学生的解题过程，指向数学素养的任务设计也必定从数学习题解决出发。而引导学生完成解题过程中，教师的目标导向是形成特定的数学思维。教师必须如何将“知识”、“能力”、“素养”、“教学”、“课标”和“教材”等元素有序整合，重新审视自身的教学形态，以构建发展学生的学科素养教学范式，才能使一线教师能够迅速在已有的经验基础上形成正确的育人价值观。

从教育思想的角度讲，我们要把“为了知识的教育”转化成为“通过知识获得教育”，知识是教育活动中促进学生发展的一种文化资源和精神养料，而从素养这个角度来思考和寻找教学改革的出发点和落脚点，才能确保教学改革的正确方向和深度推进。

参考文献：

余文森：核心素养，课堂教学改革与创新的引擎（研讨会记录）
韩震：以学科核心素养为主线 细化思想政治的学科育人目标（研讨会记录）
中华人民共和国教育部制定：《普通高中数学课程标准》（2017 版），人民教育出版社，北京